Motto:

„Matematica, în sensul cel mai larg, este dezvoltarea tuturor tipurilor de raţionament formal, necesar şi deductiv ”

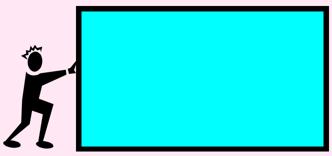
Alfred North Whitehead

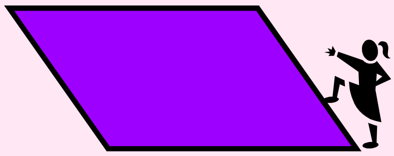
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot(ab+ac+bc)$$

PARTEA a III-a

PROBLEME DE SINTEZĂ PENTRU CLASA A VII-A

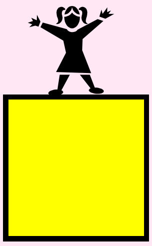
$$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$





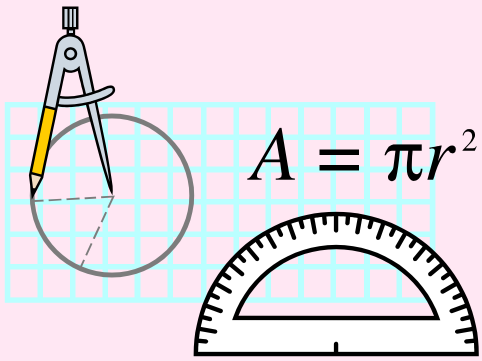
$$\left|3a^2b\right| = 3a^2\left|b\right|$$

Din cuprins:



$$P_4 = 4\cdot l_4 = 4R\sqrt{2}$$

$$A_4 = l_4^2 = 2R^2$$



$$A = \pi r^2$$

$$ax+b=0,\ a,b\in Q,\ a\neq 0$$

III.1. PROBLEME DATE LA EVALUĂRI, CONCURSURI, OLIMPIADE

1. a) Arătaţi că, dacă n este număr întreg oarecare, atunci numărul $n^2 - n$ este număr natural;
b) Dacă a şi b sunt numere întregi, astfel încât $a(a-1)+b(b-1)=0$, calculaţi $ab(a-b)$;
c) Calculaţi $|x-1|+|-1-x^2|-|x-x^2|$, ştiind că x este un număr întreg negativ.

Evaluare în educaţie la matematică
Etapa I – 15.10.2011

Rezolvare:
a) Fie $N = n^2 - n = n\cdot(n-1) \in Z$.
Dacă $n = 0 \Rightarrow N = 0 \in N$;
Dacă $n > 0 \Rightarrow n-1 \geq 0 \Rightarrow N \geq 0$;
Dacă $n < 0 \Rightarrow n-1 < 0 \Rightarrow N > 0$.
b) Bazându-ne pe cele demonstrate la punctul a), avem:
$a\cdot(a-1) \geq 0$ şi $b\cdot(b-1) \geq 0$
Din $a(a-1)+b(b-1)=0 \Rightarrow a\cdot(a-1)=0$ şi $b\cdot(b-1)=0 \Rightarrow a \in \{0;1\}$ şi $b \in \{0;1\}$.
Dacă $a = b \Rightarrow a-b=0$, deci $ab\cdot(a-b)=0$.
Dacă $a \neq b \Rightarrow a=0$ sau $b=0$, deci $ab\cdot(a-b)=0$.
c) Deoarece $x<0 \Rightarrow |x-1|+|-1-x^2|-|x-x^2| = 1-x+1+x^2-x^2+x = 2$.

2. Se consideră ΔABC în care $m\left(\widehat{BAC}\right)=120^\circ$. Punctul D este intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu latura [BC], iar punctul E este intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{ABC}$ cu latura [AC].

a) Demonstraţi că semidreapta [DE este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$;
b) Dacă F este intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{BCA}$ cu latura [AB], determinaţi măsura $\widehat{EDF}$.

Evaluare în educaţie la matematică
Etapa I – 15.10.2011

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.1*.

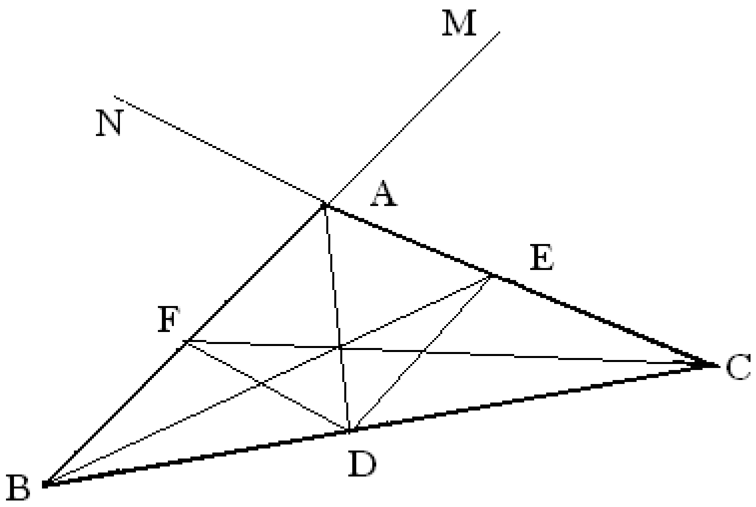


Figura III.1. Desenul problemei 2 (III.1)

a) Fie M un punct pe semidreapta [BA, astfel încât $A \in (BM) \Rightarrow m\left(\widehat{CAM}\right) = 60^\circ$.

De asemenea $m\left(\widehat{CAD}\right) = 60^\circ \Rightarrow [AC$ este bisectoarea $\widehat{DAM} \Rightarrow d(E;AB) = d(E;AD)$.

Cum $[BE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC} \Rightarrow d(E;BC) = d(E;AB)$.

Deducem că $d(E;BC) = d(E;AD) \Rightarrow d(E;DC) = d(E;AD), [DE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$.(1)

b) Procedăm în mod similar ca la punctul a).

Fie N un punct pe semidreapta [CA, astfel încât $A \in (CN) \Rightarrow m\left(\widehat{BAN}\right) = 60^\circ$.

De asemenea $m\left(\widehat{BAD}\right) = 60^\circ \Rightarrow [AB$ este bisectoarea $\widehat{DAN} \Rightarrow d(F;AC) = d(F;AD)$.

Cum $[CF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB} \Rightarrow d(F;BC) = d(F;AC)$.

Deducem că $d(F;BC) = d(F;AD) \Rightarrow d(F;BD) = d(F;AD), [DF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$.(2)

Din (1) şi (2) şi deoarece $\widehat{ADC}$ şi $\widehat{ADB}$ sunt adiacente suplementare $\Rightarrow m\left(\widehat{EDF}\right) = 90^\circ$.

3. Fie $x_n = 10101...01$, un număr format cu n cifre de 1.

a) Aflaţi o valoare a lui n, pentru care $\sqrt{x_n} \notin Q$.

b) Aflaţi toate valorile lui n, pentru care x_n este număr prim.

Evaluare în educaţie la matematică
Etapa a II-a – 03.03.2012

Rezolvare:

a) De exemplu, pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt{101} \notin Q$.

b) Dacă $n > 2$, $n = 2k = \text{par} \Rightarrow x_n \,\vdots\, 101$, deci nu e prim.

Dacă $n = 2k + 1 = \text{impar} \Rightarrow x_n = \underbrace{11...1}_{n \text{ ori}} \cdot \underbrace{9090...91}_{\frac{n-1}{2} \text{ de } 9}$, deci nu e prim.

4. Se consideră trapezul isoscel ABCD în care $AB \parallel CD$, iar $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Dacă $m\left(\widehat{BOC}\right) = 60^\circ$ şi $AB = 2 \cdot DC$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{ABC}$;

b) Dacă $m\left(\widehat{BOA}\right) = 60^\circ$, iar M, N şi P sunt mijloacele segmentelor [DO], [AO], [BC], determinaţi măsura unghiului $\widehat{MNP}$.

Evaluare în educaţie la matematică
Etapa a II-a – 03.03.2012

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.2.*

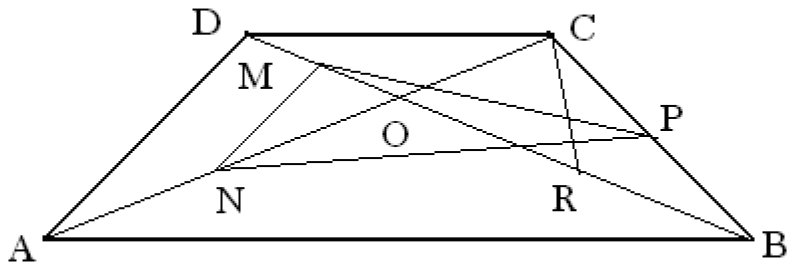


Figura III.2. Desenul problemei 4 (III.1)

a) $AB \parallel CD$ $\Delta DOC \sim \Delta AOB \Rightarrow OB = 2 \cdot OC$.

Notăm cu R mijlocul segmentului [OB], atunci ΔORC este echilateral, iar ΔBRC este isoscel cu

$BR = RC \Rightarrow m\left(\widehat{RBC}\right) = 30^\circ$. Cum $m\left(\widehat{ABO}\right) = 30^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{ABC}\right) = 60^\circ$.

b) [MN] este linie mijlocie în $\Delta AOD \Rightarrow MN = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$.

Cum $BN \perp AC$, iar $[NP]$ este mediană în $\Delta BNC \Rightarrow NP = \frac{BC}{2}$.

În mod similar, $MP = \frac{BC}{2} \Rightarrow \Delta MNP$ este un triunghi echilateral, prin urmare $m\left(\widehat{MNP}\right) = 60^\circ$.

5. Se consideră trapezul ABCD în care $m\left(\widehat{BAD}\right) = m\left(\widehat{ADC}\right) = 90^\circ$ şi $AC \perp BD$. Se ştie că $AB = 4\,\text{cm},\ AC = 8\sqrt{5}\,\text{cm},\ AB < CD$.

a) Calculaţi lungimea segmentului [DC] ;

b) Calculaţi aria triunghiului MCD, unde $\{M\} = AD \cap BC$.

Evaluare în educaţie la matematică
Etapa a III-a – 23.06.2012

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.3*.

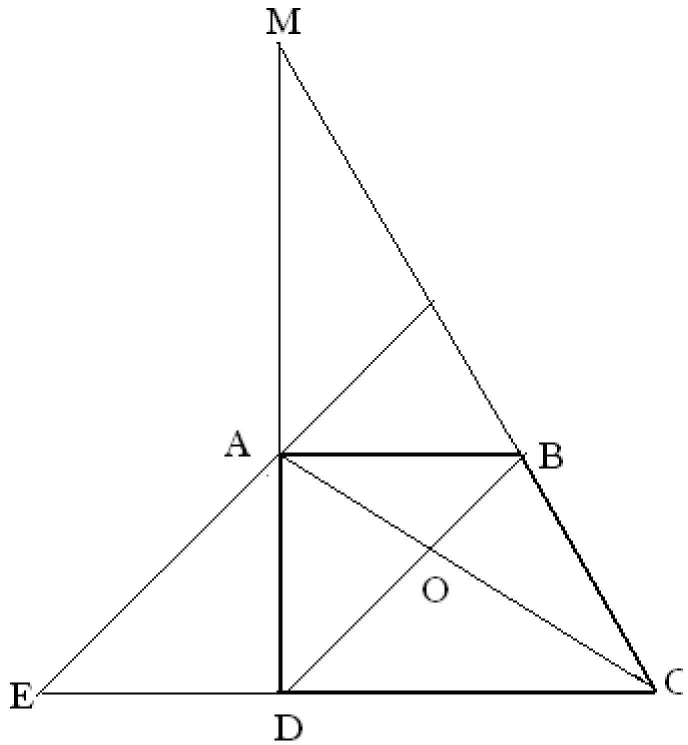


Figura III.3. Desenul problemei 5 (III.1)

a) Paralela prin punctul A la dreapta BD intersectează dreapta DC în punctul E, deci $ED = AB = 4\text{cm}$.
Notăm DC=x şi aplicăm teorema catetei în triunghiul dreptunghic AEC :
$AC^2 = DC \cdot EC \Rightarrow 320 = x \cdot (x+4)$.
Ultima egalitate este echivalentă cu $324 = (x+2)^2 \Rightarrow x+2 = 18 \Rightarrow x = 16\text{cm}$.
b) Conform teoremei înălţimii aplicată în triunghiul dreptunghic AEC, obţinem:
$AD^2 = DE \cdot DC = 64 \Rightarrow AD = 8\text{cm}$.
Triunghiurile MAB şi MDC
$\Delta MAB \sim \Delta MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow MD = \frac{32}{3}\text{cm}$.
$A_{MDC} = \frac{DC \cdot DM}{2} = \frac{256}{3}\text{cm}^2$.

6. Se consideră numerele prime p şi q, $p, q \geq 3$. Demonstraţi că:
a) Dacă numărul $P = \frac{p^2+q^2}{p+q} \in N$, atunci numărul P este prim;
b) Dacă numărul $N = \frac{p^2+q^2}{p-q} \in N$, atunci numărul N-1 este pătrat perfect.

Evaluare în educaţie la matematică
Etapa competiţională – 12.05.2012

Rezolvare:
a) $P = \frac{p^2+q^2}{p+q} = p+q-\frac{2pq}{p+q} \in N$.
Deoarece $P \in N \Rightarrow p+q | 2pq$.
Cum $p+q = 2t = \text{nr.par},\ t \in N, t \geq 3 \Rightarrow t|pq$.
Fie d un divizor prim al lui t $\Rightarrow d|p$ sau $d|q$.
Cum $d|p+q \Rightarrow d|p$ şi $d|q \Rightarrow p = q = d$ şi $P = d$ care este număr prim.
b) Evident $p > q$ şi $N = \frac{p^2+q^2}{p-q} = p-q+\frac{2pq}{p-q}$.
Cum p-q este număr par, rezultă că $p-q = 2s,\ s \in N,\ s \geq 1 \Rightarrow s|pq$.
Dacă $s \neq 1$, considerăm d un divizor prim al lui s. Cum $d|p-q \Rightarrow d|p$ şi $d|q$.
Deducem că $p = q = d$, contradicţie. Rezultă că $s = 1$.
Prin urmare, $p = q+2$, iar $N-1 = 2+\frac{2q \cdot (q+2)}{2} - 1 = q^2+2q+1 = (q+1)^2$.

7. Pentru a face o pâine se folosesc făină, ulei şi apă în proporţia 11:4:5. Cantitatea de apă folosită pentru prepararea unui amestec de 320 g este:

Concursul Naţional Lumina Math, 2011

Rezolvare:
Aplicăm regula de trei simple:
20 părţi…………………………5 părţi apă
320 g……………………………x g apă
x = 80 g apă.

8. Rezultatul calculului: $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ este:

Concursul Naţional Lumina Math, 2011

Rezolvare:

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=1-\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}=1-\frac{x-1}{-1}=1+x-1=x.$$

9. Două dreptunghiuri (*figura III.4*) de dimensiuni 8x10 şi 9x12 se intersectează. Zona marcată cu gri închis are suprafaţa de 37. Suprafaţa zonei marcate cu gri deschis este:

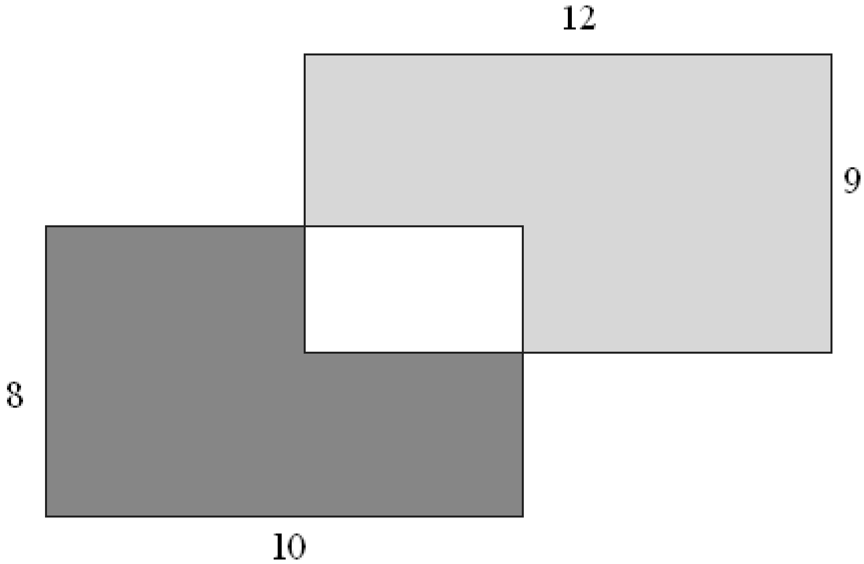


Figura III.4. Desenul problemei 9 (III.1)

Concursul Naţional Lumina Math, 2011

Rezolvare:

$A_{\text{dreptungi gri închis}} = 8 \cdot 10 = 80$

$A_{\text{zonei marcate gri închis}} = 37$

Rezultă că: $A_{\text{dreptunghi alb}} = 80 - 37 = 43$

$A_{\text{dreptungi gri deschis}} = 9 \cdot 12 = 108$

$A_{\text{zonei marcate gri deschis}} = A_{\text{dreptungi gri deschis}} - A_{\text{dreptunghi alb}} = 108 - 43 = 65$

10. Dacă $\dfrac{6a+5b}{2a+4b}=\dfrac{5}{2}$, $(a,b \neq 0)$, atunci valoarea expresiei: $E=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}-\dfrac{b^2}{a^2}$ este:

Concursul Naţional Lumina Math, 2011

Rezolvare:

$$2\cdot(6a+5b)=5\cdot(2a+4b) \Rightarrow 12a+10b=10a+20b \Rightarrow a=5b \Rightarrow \frac{a}{b}=5,\ \frac{b}{a}=\frac{1}{5},\ \frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$E=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{5}+5-\frac{1}{25}=\frac{129}{25}.$$

11. Să se demonstreze că numărul $\sqrt{1+2\cdot3+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15+16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21}$ nu este raţional.

Concursul "Problema lunii"- februarie – Fundaţia de Evaluare în Educaţie

Rezolvare:

Notez cu $N=1+2\cdot3+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15+16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21$

$$N=1+2\cdot3+2^2\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot2\cdot6\cdot13\cdot14\cdot3\cdot5+16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21$$
$$N=1+6+2\cdot6\cdot10+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot6\cdot13\cdot14\cdot3\cdot10+16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot2\cdot10\cdot21$$
$$N=1+6+10\cdot(2\cdot6+7\cdot8\cdot9+3\cdot6\cdot11\cdot13\cdot14+2\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot21)$$

Ultima cifră a lui N este:

$$UC(N)=UC(1+6+0)=7$$

Cum ultima cifră a lui N este 7, rezultă că N nu este pătrat perfect, deci numărul $\sqrt{1+2\cdot3+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15+16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21}$ nu este raţional.

12. Fie ABCD un pătrat, M mijlocul laturii DC şi N mijlocul laturii BC. Aria ΔADM = 9 cm^2.

a) Aflaţi aria patrulaterului ABCM.

b) Arătaţi că $DN \perp AM$.

Concursul "Problema lunii"- mai – Fundaţia de Evaluare în Educaţie

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.5.*

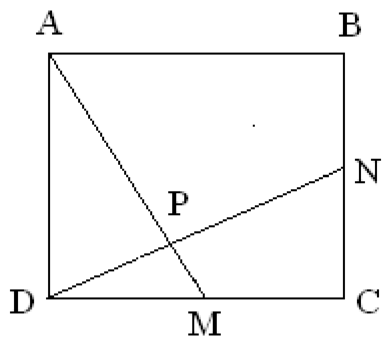


Figura III.5. Desenul problemei 12 (III.1)

a) ΔADM este triunghi dreptunghic.

Notăm: AB = BC = CD = DA = *l*

Rezultă:

DM = MC = BN = NC = *l/2*

$$A_{\Delta ADM}=\frac{\frac{l}{2}\cdot l}{2}=\frac{l^2}{4}=9\Rightarrow l^2=36\Rightarrow l=6\,cm$$

$$A_{ABCM}=l^2-S_{\Delta ADM}=36-9=27\ cm^2$$

b) Notez $P=AM\cap ND$

$$\Delta ADM\equiv\Delta DCN\,(CC)\Rightarrow m\widehat{DAM}=m\widehat{NDC}=x^0\Rightarrow m\widehat{AMD}=90^0-x^0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\widehat{DPM}=180^0-x^0-90^0+x^0=90^0\Rightarrow DN\perp AM$$

13. Să se arate că $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz,\ \forall x,y,z\in R$.

Concursul "Problema lunii"- iunie – Fundaţia de Evaluare în Educaţie

Rezolvare: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz\ \ |\cdot2\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\geq0$

$\Rightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq0$.

14. Să se afle numerele reale x, y, z astfel încât:

$$\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{y^2+2y+5}+\sqrt{9z^2+6z+2}=4$$

Concursul "Problema lunii"- martie – Fundaţia de Evaluare în Educaţie

Rezolvare:

$$\sqrt{(x+2)^2+1}+\sqrt{(y+1)^2+4}+\sqrt{(3z+1)^2+1}=4$$

Cum,

$$\begin{cases}(x+2)^2\ge 0\\(y+1)^2\ge 0\\(3z+1)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+2)^2+1\ge 1\\(y+1)^2+4\ge 4\\(3z+1)^2+1\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+1}\ge 1\\\sqrt{(y+1)^2+4}\ge 2\\\sqrt{(3z+1)^2+1}\ge 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+1}+\sqrt{(y+1)^2+4}+\sqrt{(3z+1)^2+1}\ge 4.$$

Deci, egalitatea are loc pentru

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+1}=1\\\sqrt{(y+1)^2+4}=2\\\sqrt{(3z+1)^2+1}=1\end{cases}\Rightarrow\text{prin ridicări la pătrat}\begin{cases}(x+2)^2+1=1\\(y+1)^2+4=4\\(3z+1)^2+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+2)^2=0\\(y+1)^2=0\\(3z+1)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-1\\z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

15. Să se scrie numărul $\underbrace{11...11}_{2012\text{ ori}}\underbrace{22...22}_{2012\text{ ori}}$ ca un produs de două numere consecutive.

Concursul de matematică Sclipirea minţii

Rezolvare:

Pornim rezolvarea cu câteva exemple concrete:

- $1122=11\cdot 10^2+22=11\cdot 50\cdot 2+22=22\cdot(50+1)=22\cdot 51=2\cdot 11\cdot 3\cdot 17=(11\cdot 3)\cdot(2\cdot 17)$

$\Rightarrow 1122=33\cdot 34;$

- $111222=111\cdot 10^3+222=111\cdot 500\cdot 2+222=222\cdot(500+1)=222\cdot 501=(111\cdot 3)\cdot(2\cdot 167)$

$\Rightarrow 111222=333\cdot 334;$

Prin urmare, putem scrie:

$$\underbrace{11...11}_{2012\text{ori}}\underbrace{22...22}_{2012\text{ori}}=\underbrace{11...11}_{2012\text{ori}}\cdot 10^{2012}+\underbrace{22...22}_{2012\text{ori}}=\underbrace{22...22}_{2012\text{ori}}\cdot\left(5\underbrace{0...0}_{2011\text{ori}}+1\right)=\underbrace{22...22}_{2012\text{ ori}}\cdot 5\underbrace{00..0}_{2010\text{ori}}1=$$

$$=\left(\underbrace{11...1}_{2012\text{ori}}\cdot 3\right)\cdot\left(2\cdot 1\underbrace{66...6}_{2010\text{ori}}7\right)=\underbrace{33...33}_{2012\text{ori}}\cdot\underbrace{33...3}_{2011\text{ori}}4$$

16. În ΔABC, $[AM]$ este mediană, $M\in(BC)$, iar $[MN]$ este înălţime în ΔAMC, $N\in(AC)$. Ştiind că AC = 28 cm şi MN = 2,5 dm,

a) Aflaţi aria ΔABC;

b) Arătaţi că $AM<\dfrac{AB+AC}{2}$.

Olimpiada Naţională de matematică,
Faza pe şcoală – "Nicolae Bălcescu" Oradea, 26.01.2012

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.6.*

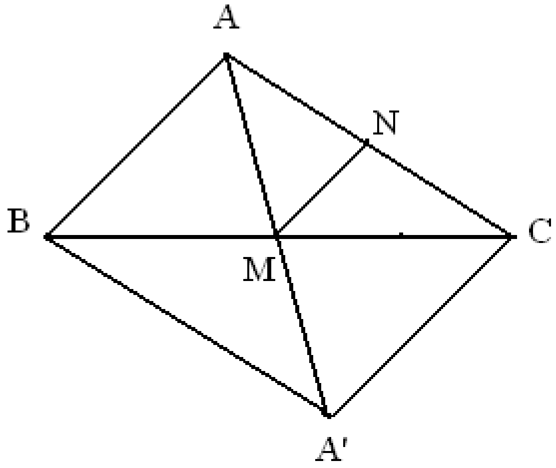


Figura III.6. Desenul problemei 16 (III.1)

a) AC = 28 cm şi MN = 25 cm $\Rightarrow A_{\Delta AMC} = \dfrac{MN \cdot AC}{2} = 14 \cdot 25 = 350\text{cm}^2$.

Aplicând proprietatea medianei, şi anume că o mediană împarte un triunghi în două triunghiuri cu arii egale, $\Rightarrow A_{\Delta ABC} = 2 \cdot A_{\Delta AMC} = 700\text{cm}^2$.

b) Construim MA' simetricul punctului A faţă de M şi avem:

$$\left.\begin{array}{l} AM = MA' \\ BM = MC \end{array}\right| \Rightarrow ACA'B \text{ este paralelogram} \Rightarrow \begin{cases} AB = CA' \\ AC = BA' \end{cases}$$

În $\Delta ACA'$: $AC + CA' > AA' \Rightarrow AC + AB > 2 \cdot AM \Rightarrow AM < \dfrac{AC + AB}{2}$.

17. Să se arate că:

a) $\underbrace{(3+3+...+3)^2}_{\text{de 2012 ori}} + \underbrace{(4+4+...+4)^2}_{\text{de 2012 ori}} = \underbrace{(5+5+...+5)^2}_{\text{de 2012 ori}}$;

b) $\underbrace{(33...3)^2}_{\text{de 2012 ori}} + \underbrace{(44...4)^2}_{\text{de 2012 ori}} = \underbrace{(55...5)^2}_{\text{de 2012 ori}}$.

Olimpiada Naţională de matematică,
Etapa locală-Oradea, 11.02.2012

Rezolvare:

a) $\underbrace{(3+3+...+3)^2}_{\text{de 2012 ori}} + \underbrace{(4+4+...+4)^2}_{\text{de 2012 ori}} = \underbrace{(5+5+...+5)^2}_{\text{de 2012 ori}}$

$(3 \cdot 2012)^2 + (4 \cdot 2012)^2 = (5 \cdot 2012)^2 \Rightarrow 3^2 \cdot 2012^2 + 4^2 \cdot 2012^2 = 5^2 \cdot 2012^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2012^2 \cdot \left(3^2 + 4^2\right) = 5^2 \cdot 2012^2 \;\Big|: 2012^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25$

b) $\underbrace{(33...3)^2}_{\text{de 2012 ori}} + \underbrace{(44...4)^2}_{\text{de 2012 ori}} = \underbrace{(55...5)^2}_{\text{de 2012 ori}}$

$3^2 \cdot \underbrace{(11...1)^2}_{\text{de 2012 ori}} + 4^2 \cdot \underbrace{(11...1)^2}_{\text{de 2012 ori}} = 5^2 \cdot \underbrace{(11...1)^2}_{\text{de 2012 ori}} \Rightarrow \underbrace{(11...1)^2}_{\text{de 2012 ori}} \cdot \left(3^2 + 4^2\right) = 5^2 \cdot \underbrace{(11...1)^2}_{\text{de 2012 ori}} \;\Big|: \underbrace{(11...1)^2}_{\text{de 2012 ori}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25$

18. Baza mare a unui trapez este de *n* ori mai mare decât baza mică.

a) Demonstraţi că raportul ariilor patrulaterelor determinate de linia mijlocie a trapezului este $\frac{n+3}{3n+1}$;

b) Pentru ce valori ale lui n raportul ariilor este $\frac{1}{2}$?

Olimpiada Naţională de matematică,
Etapa locală-Oradea, 11.02.2012

Rezolvare:

a) Construim desenul din *figura III.7.*

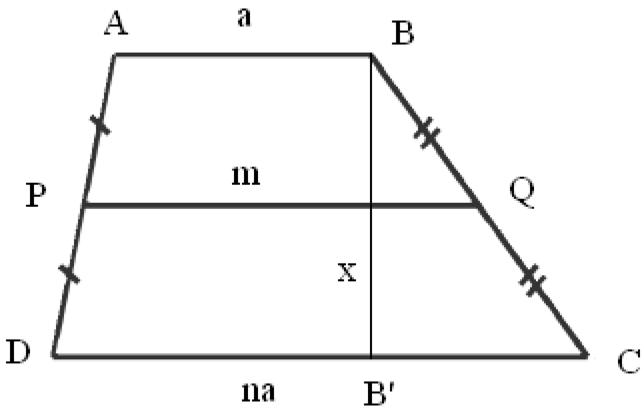


Figura III.7. Desenul problemei 18 (III.1)

Fie a = AB baza mică a trapezului, m = PQ linia mijlocie, iar x=BB' înălţimea trapezului.
În consecinţă avem:

$$m = \frac{a+na}{2} = \frac{a\cdot(n+1)}{2}$$

$$\frac{A_{ABQP}}{A_{PQCD}} = \frac{\frac{(m+a)\cdot x}{2}}{\frac{(na+m)\cdot x}{2}} = \frac{m+a}{na+m} = \frac{\frac{a\cdot(n+1)}{2}+a}{na+\frac{a\cdot(n+1)}{2}} = \frac{an+a+2a}{2na+an+a} = \frac{an+3a}{3an+a} = \frac{a\cdot(n+3)}{a\cdot(3n+1)} = \frac{n+3}{3n+1}.$$

b) $\frac{n+3}{3n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2n+6 = 3n+1 \Rightarrow n = 5$.

19. Se consideră numerele naturale impare $a_1, a_2, ..., a_{2012}$. Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2012}^2 - 1}$ este iraţional.

Olimpiada Naţională de matematică,
Etapa judeţeană, 10.03.2012

Rezolvare:

Numărul A este raţional, dacă şi numai dacă numărul $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2012}^2 - 1$ este pătrat perfect.

Pătratul unui număr impar este de forma $4k+1,\ k \in N$.

Suma $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2012}^2$ este un multiplu de 4, deoarece $4 \mid 2012$.

Atunci $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2012}^2 - 1$ este un număr impar de forma $4k+3$, deci nu pătrat perfect.

20. Numim *redus* al unui număr natural *A* cu *n* cifre $(n \geq 2)$ un număr de *n-1* cifre obţinut prin ştergerea uneia din cifrele lui *A*. De exemplu, reduşii lui 1024 sunt 124, 104 şi 102.
Determinaţi câte numere de şapte cifre nu se pot scrie ca suma dintre un număr natural *A* şi un redus al lui *A*.

Olimpiada Naţională de matematică,
Etapa naţională, 03.04.2012

Rezolvare: Să numim *convenabil*, respectiv *neconvenabil*, un număr care se poate, respectiv nu se poate scrie ca suma dintre un număr şi un redus al său.

Suma dintre numărul $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ şi redusul său $B = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ este numărul $11 \cdot B + a_7$, adică un număr de cel puţin 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Alegând în mod potrivit numărul B şi cifra a_7, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este *convenabil*.

Suma dintre numărul $C = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$ şi redusul său $D = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ este numărul $11 \cdot D + a_6$, adică un număr de cel mult 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Ca urmare, alegând în mod potrivit numărul D şi cifra a_6, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este *convenabil*.

Aşadar, numerele neconvenabile se află în mulţimea numerelor de 7 cifre care dau restul 10 la împărţirea cu 11. Deoarece suma oricărui număr natural cu orice redus al său, altul decât cel obţinut prin ştergerea ultimei cifre, este un număr par, rezultă că numerele de 7 cifre, de forma $22p + 21, p \in N$, sunt n*econvenabile*.

Rămâne să studiem situaţia numerelor de 7 cifre, de forma $22p + 10, p \in N$. Vom arăta că aceste numere se pot scrie sub forma:

$\overline{a_1a_2...a_{n-2}a_{n-1}a_n} + \overline{a_1a_2...a_{n-2}a_n} = 110 \cdot \overline{a_1a_2...a_{n-2}} + 10 \cdot a_{n-1} + 2a_n,\ n \in \{6,7\}$.

Numerele de forma $22p + 10, p \in N$ au, în funcţie de restul împărţirii lui *p* la 5, una din formele $110k + 10, 110k + 32, 110k + 54, 110k + 76, 110k + 98,\ k \in N$.

Alegând $k = \overline{a_1a_2...a_{n-2}}$ şi, de exemplu, $(a_{n-1}, a_n) \in \{(1,0), (3,1), (5,2), (7,3), (9,4)\}$, rezultă că numerele de forma $22p + 10, p \in N$, sunt convenabile.

Ca urmare, numerele neconvenabile de 7 cifre sunt cele de forma $22p + 21, p \in N$.

Din $10^6 \leq 22p + 21 \leq 10^7 - 1 \Rightarrow 45454 \leq p \leq 454544$.
Cum *p* ia $454544 - 45454 + 1 = 409091$ valori, rezultă că sunt 409091 numere neconvenabile de 7 cifre.

III.2. PROBLEME DIN REVISTE DE MATEMATICĂ

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$\left|2^x-1024\right|+\left(y^2-4\right)^2+\left(z^2-121\right)^2=0$$

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1375

Rezolvare:

Fiecare din termenii ecuaţiei sunt ≥ 0. Pentru a avea loc ecuaţia e necesar ca fiecare termen să fie 0.

$\left|2^x-1024\right|=0 \Rightarrow \left|2^x-2^{10}\right|=0 \Rightarrow 2^x-2^{10}=0 \Rightarrow 2^x=2^{10} \Rightarrow x=10$

$\left(y^2-4\right)^2=0 \Rightarrow y^2-4=0 \Rightarrow y^2-2^2=0 \Rightarrow y=\pm 2$

$\left(z^2-121\right)^2=0 \Rightarrow z^2-121=0 \Rightarrow z^2-11^2=0 \Rightarrow z=\pm 11$

$(x,y,z)=\{(10;2;11);\ (10;2;-11);\ (10;-2;11);\ (10;-2;-11)\}$

2. Determinaţi numerele naturale a,b,c,x,y,m, ştiind că sunt îndeplinite condiţiile:

$x-a=12-b$

$mb+mx-am=60$

$c+a=m(m-3)$

$x^2+bx+m^2=145+ax$

$(2x+2y)\cdot(cx-ca+cb)=72(x+y)$

Revista de matematică Alpha, C.R.VI.5.

Rezolvare:

$mb+mx-am=60 \Rightarrow m(b+x-a)=60 \Rightarrow 12m=60 \Rightarrow m=5$

Din $x-a=12-b \Rightarrow b+x-a=12$

$(2x+2y)\cdot(cx-ca+cb)=72(x+y) \Rightarrow 2(x+y)\cdot c(x-a+b)=72(x+y) \Rightarrow c(x-a+b)=36$

Din $m(b+x-a)=60$ şi $c(x-a+b)=36$

$\Rightarrow \dfrac{m(b+x-a)}{c(x-a+b)}=\dfrac{60}{36} \Rightarrow \dfrac{m}{c}=\dfrac{60}{36}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow c=\dfrac{3m}{5} \Rightarrow c=3$

Din $c+a=m(m-3) \Rightarrow 3+a=5\cdot 2 \Rightarrow a=7$

$b+x-a=12 \Rightarrow b+x=19$

$x^2+bx+m^2=145+ax \Rightarrow x(x+b)+25=145+7x \Rightarrow 19x=120+7x \Rightarrow 12x=120 \Rightarrow x=10$

$b+10=19 \Rightarrow b=9$

$(20+2y)\cdot(30-21+27)=72(10+y) \Rightarrow 36=36$, y oricât

3. Considerăm 10 numere naturale (nu neapărat diferite) şi calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 din aceste numere şi obţinem: 83, 84, 85,…,90, 91 (sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflaţi cele 10 numere.

Revista de matematică Alpha, Vasile Şerdean, prof. Gherla, Cluj

Rezolvare:

Cu cele 10 numere se pot forma 10 sume, fiecare cu 9 termeni dintre cele 10 numere.

Deoarece s-au obţinut doar 9 sume de valori diferite (de la 83 la 91), rezultă că două numere dintre cele 10 sunt egale.

Observând că diferenţa dintre valoarea maximă şi valoarea minima a sumelor este 91-83 = 8 şi că sumele sunt numere consecutive, scriem relaţia:

$(x-4)+(x-3)+(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=9x$

$83<9x<91 \Rightarrow x=10 \Rightarrow$ şirul: 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

4. Să se arate că:

a) $xy-2x-2y+5>0, \forall x,y\in(1;3)$**;**

b) $\dfrac{2xy-5x-5y+14}{xy-2x-2y+5}\in(1;3), \forall x,y\in(1;3)$.

Monica Foszto, Iaşi
Gazeta matematică (GM) nr. 2 / 2011, E: 14122

Rezolvare:

a) $xy-2x-2y+5=(x-2)\cdot(y-2)+1$.

Dacă $\begin{cases}1<x<3\\1<y<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<x-2<1\\-1<y-2<1\end{cases}\Rightarrow -1<(x-2)\cdot(y-2)<1\Rightarrow 0<(x-2)\cdot(y-2)+1<2\Rightarrow$

$\Rightarrow xy-2x-2y+5>0.$

b) $\begin{cases}1<\dfrac{2xy-5x-5y+14}{xy-2x-2y+5}<3\\xy-2x-2y+5>0\end{cases}\Rightarrow xy-2x-2y+5<2xy-5x-5y+14<3xy-6x-6y+15\Rightarrow$

$\Rightarrow xy-2x-2y+5<2xy-5x-5y+14\Leftrightarrow xy-3x-3y+9>0\Leftrightarrow(x-3)\cdot(y-3)>0$, evident.

$\Rightarrow 2xy-5x-5y+14<3xy-6x-6y+15\Leftrightarrow xy-x-y+1>0\Leftrightarrow(x-1)\cdot(y-1)>0$, evident.

5. Fie $a,b\in R^*$, astfel încât $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{a^2b}+\dfrac{1}{ab^2}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$.

Arătaţi că:

a) dacă $a>0$ şi $b>0$, atunci $a+b>ab$;

b) dacă $ab<0$, atunci $a+b<ab$.

Vasile Scurtu, Bistriţa,
Gazeta matematică (GM) nr. 2 / 2011, E: 14136

Rezolvare:

$$\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)+\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)>0\Rightarrow\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)>0$$

Cum $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+1>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-1>0\Rightarrow\dfrac{a+b}{ab}>1\Rightarrow$

a) dacă $a>0$ şi $b>0$, atunci $a+b>ab$;

b) dacă $ab<0$, atunci $a+b<ab$.

6. Calculaţi lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu aria de $2cm^2$ şi perimetrul de 4cm.

Adrian Stan, Buzău,
Gazeta matematică (GM) nr. 3 / 2011, E: 14152

Rezolvare:

Notăm $AB=c, AC=b, BC=a$, BC = ipotenuză.

Avem: $A_{\Delta ABC}=\dfrac{b\cdot c}{2}$,

$a^2=b^2+c^2$

$P_{\Delta ABC}=a+b+c\Rightarrow P_{\Delta ABC}-a=b+c\ |(\ )^2\Rightarrow(P_{\Delta ABC}-a)^2=(b+c)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{\Delta ABC}^2-2\cdot a\cdot P_{\Delta ABC}+a^2=b^2+2bc+c^2\Rightarrow P_{\Delta ABC}^2-2\cdot a\cdot P_{\Delta ABC}=4\cdot A\Rightarrow 16-8\cdot a=8\Rightarrow$

$\Rightarrow a=1$

7. În triunghiul ABC construim bisectoarea [AD şi mediana [AM], $D, M \in (BC)$. Dacă $\frac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{k}$, $k \in N^*$, aflaţi k pentru care $\frac{AC}{AB}$ este număr natural.

Elena Rîmniceanu, Victor Săceanu Drobeta Turnu- Severin,
Gazeta matematică (GM) nr. 3 / 2011, E: 14154

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.8.*

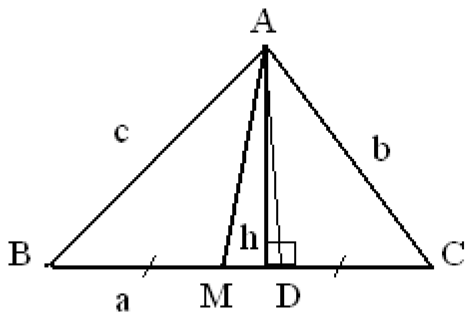


Figura III.8. Desenul problemei 7 (III.2)

Notăm $AB = c, AC = b, BC = a$, $d(A, BC) = h$.

$$\begin{cases} \dfrac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{\frac{h \cdot MD}{2}}{\frac{h \cdot BC}{2}} = \dfrac{MD}{BC} \\ \dfrac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{MD}{BC} = \frac{1}{k} \qquad (1)$$

Aplicăm teorema bisectoarei: $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c} \Rightarrow DM = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a \cdot (b-c)}{2 \cdot (b+c)}$.

Atunci (1) devine:

$$\frac{MD}{BC} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{\frac{a \cdot (b-c)}{2 \cdot (b+c)}}{a} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{b-c}{2 \cdot (b+c)} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{k+2}{k-2} = 1 + \frac{4}{k-2} \in N \Leftrightarrow k-2 \mid 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-2 \in \{1,2,4\} \Rightarrow k \in \{3,4,6\}$$

8. Să se arate că în orice triunghi, cel puţin o latură are lungimea mai mare sau egală cu media aritmetică a lungimilor celorlalte două laturi.

Gheorghe Stoica, Petroşani
Gazeta matematică (GM) nr. 7-8-9 / 2011, E: 14221

Rezolvare: Folosim metoda reducerii la absurd.

Presupunem că ceea ce se cere să demonstrăm este fals, deci va fi adevărată negaţia propoziţiei. Aşadar, presupunem că este adevărată propoziţia: *Există un triunghi în care nici o latură nu are lungimea mai mare sau egală cu media aritmetică a lungimilor celorlalte două laturi; deci, toate laturile au lungimea mai mică decât media aritmetică a lungimilor celorlalte două laturi.*

Conform acestei presupuneri, putem scrie relaţiile :

$a < \frac{b+c}{2} \Rightarrow 2a < b + c$,

$b < \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b < a + c$,

$c < \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2c < a + b$.

Adunând relaţiile membru cu membru obţinem:

$2a+2b+2c<(b+c)+(a+c)+(a+b) \Rightarrow 2a+2b+2c<2a+2b+2c \Rightarrow$ “Fals”.

De aici deducem ca presupunerea făcuta este falsă, deci este adevărată propoziţia:

În orice triunghi, cel puţin o latură are lungimea mai mare sau egală cu media aritmetică a lungimilor celorlalte doua laturi.

9. Arătaţi că ecuţia: $\left|x-\frac{14}{5}\right|+\left|x-\frac{8}{3}\right|=x-3$, nu are soluţii reale.

Vasile Chiriac, Bacău

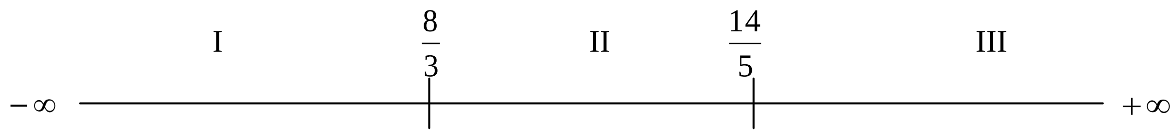
Gazeta matematică (GM) nr. 10 / 2011, E: 14247

Rezolvare: Explicităm modulele:

$$\left|x-\frac{14}{5}\right|=\begin{cases} x-\frac{14}{5}, \text{dacă } x\ge\frac{14}{5} \\ -x+\frac{14}{5}, \text{dacă } x<\frac{14}{5} \end{cases}$$

$$\left|x-\frac{8}{3}\right|=\begin{cases} x-\frac{8}{3}, \text{dacă } x\ge\frac{8}{3} \\ -x+\frac{8}{3}, \text{dacă } x<\frac{8}{3} \end{cases}$$

Pe axa numerelor reale vom distinge trei intervale:



Cazul I: Pentru $x\in\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$ ecuaţia devine:

$$\left(-x+\frac{14}{5}\right)+\left(-x+\frac{8}{3}\right)=x-3$$

$\frac{127}{15}=3x \Leftrightarrow x=\frac{127}{45}$, dar $\frac{127}{45}>\frac{8}{3}$, deci $\frac{127}{45}\notin\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$, rezultă că $\frac{127}{45}$ nu e soluţie.

Cazul II: Pentru $x\in\left(\frac{8}{3},\frac{14}{5}\right]$ ecuaţia devine :

$$\left(-x+\frac{14}{5}\right)+\left(x-\frac{8}{3}\right)=x-3$$

$\frac{47}{15}=x$, dar $\frac{47}{15}>\frac{14}{5}$, deci $\frac{47}{15}\notin\left(\frac{8}{3},\frac{14}{5}\right]$, rezultă că $\frac{47}{15}$ nu e soluţie.

Cazul II: Pentru $x\in\left(\frac{14}{5},+\infty\right)$ ecuaţia devine :

$$\left(x-\frac{14}{5}\right)+\left(x-\frac{8}{3}\right)=x-3$$

$x=\frac{37}{15}$, dar $\frac{37}{15}<\frac{14}{4}$, deci $\frac{37}{15}\notin\left(\frac{14}{5},+\infty\right)$, rezultă că $\frac{37}{15}$ nu e soluţie.

În concluzie, ecuaţia nu are soluţii reale.

10. Fie un triunghi isoscel cu r = 3 cm şi P = 32 cm. (r este raza cercului înscris în triunghi, iar P este perimetrul triunghiului). Calculaţi lungimile laturilor triunghiului, ştiind că sunt numere naturale.

Cristina Vijdelic şi Mihai Vijdelic, Baia Mare
Gazeta matematică (GM) nr. 7-8-9 / 2011, E: 14223

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.9.*

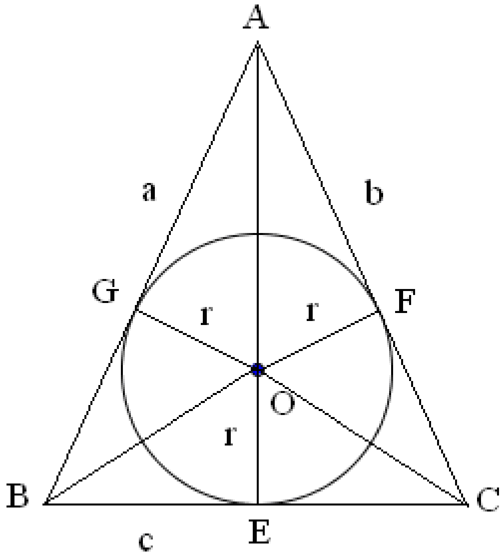


Figura III.9. Desenul problemei 10 (III.2)

Lungimile laturilor triunghiului a,b,c trebuie să respecte inegalitatea triunghiulară :

$$\begin{cases} |b-c| < a < b+c \\ |a-c| < b < a+c \\ |a-b| < c < a+b \end{cases}$$

În cazul triunghiului isoscel ABC, cu perimetrul de 32 cm şi lungimile laturilor exprimate prin numere naturale sunt posibile următoarele cazuri:

a=AB	b=AC	c=BC
9	9	14
10	10	12
11	11	10
12	12	8
13	13	6
14	14	4
15	15	2

Acum vom ţine seama şi de raza cercului înscris în triunghi r = OE=OF=OG=3 cm.

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta AOB} + A_{\Delta BOC} + A_{\Delta AOC} = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (AB + BC + AC) = \frac{3 \cdot 32}{2} = 48 cm^2$$

$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = 48 \Rightarrow BC \cdot AE = 96 cm^2$ şi, deoarece lungimea laturii BC e număr natural, rezultă că şi lungimea segmentului AE e număr natural. Înseamnă că laturile triunghiului ABE dreptunghic sunt numere pitagoreice $\Rightarrow BE = \frac{BC}{2}$.

Singura situaţie care respectă condiţia este a=b=10cm şi c=12 cm.

Atunci $10^2 = 6^2 + AE^2$, de unde $AE^2 = 100 - 36$, $AE = \sqrt{64} = 8\,cm \Rightarrow BC = \frac{96}{AE} = \frac{96}{8} = 12\,cm$.

11. Fie m şi n numere naturale, m<n şi numerele naturale $x_1, x_2, ..., x_{n-m}$, distincte două câte două, cuprinse între 2m şi 2n. Demonstraţi că dintre numerele $x_1, x_2, ..., x_{n-m}$, ori există unul egal cu $m+n$, ori suma a două dintre ele este egală cu $2m+2n$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu-Severin
Gazeta matematică (GM) nr. 7-8-9 / 2011, E: 14222

Rezolvare :

Pentru înţelegerea problemei vom lua un exemplu :

$m=10,\ n=15 \Rightarrow n-m=15-10=5 \Rightarrow$ vor fi 5 numere.

Generalizând, vor fi *n-m* numere.

$2m = 2\cdot 10 = 20$

$2n = 2\cdot 15 = 30$

Numerele vor fi cuprinse între 20 şi 30.

$20 < 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 < 30$

Sunt în total $30-20-1=9$ numere.

Generalizând, vor fi posibile *2n-2m -1 = 2(n-m)-1* numere naturale, deci un număr impar de numere naturale.

Observăm că termenul din mijloc este $25=10+15$ sau media aritmetică a numerelor 20 şi 30.

Dacă printre cei 5 termeni nu îl luăm pe cel din mijloc, atunci trebuie să luăm termeni dinaintea lui şi de după el, cel puţin unul dintr-o parte, pentru a avea 5 numere.

Dacă luăm, de exemplu, pe 24, 26, 27, 28, 29, există 24 +26 = 50 = 20+ 30.

Deci, numerele au forma: $2m < m+n-k, ..., m+n-1, m+n, m+n+1, ..., m+n+k < 2n$, unde k este partea întreagă a numărului $\dfrac{n-m}{2}$.

- Dacă printre cele $n-m$ numere este termenul din mijloc, acesta e egal cu $m+n$.
- Dacă printre cele $n-m$ numere nu este termenul din mijloc, atunci obligatoriu va exista cel puţin o pereche de forma $m+n-p$ şi $m+n+p$, a căror sumă este $2m+2n$.

12. Arătaţi că nu există nici un număr de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{bc}} + a$.

Vijdeluc Mihai, Baia Mare
Gazeta matematică (GM) nr. 7-8-9 / 2011, E: 14228

Rezolvare:

Ridicăm la pătrat ambii membri ai relaţiei date folosind în membrul al doilea formula $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Obţinem : $\overline{abc} = \overline{bc} + 2a\sqrt{\overline{bc}} + a^2$

$100a + \overline{bc} = \overline{bc} + 2a\sqrt{\overline{bc}} + a^2$

$100a = 2a\sqrt{\overline{bc}} + a^2 \quad |:a,\ a \neq 0 \Rightarrow 100 = 2\sqrt{\overline{bc}} + a$

$\Rightarrow 100 - a = 2\sqrt{\overline{bc}} \Rightarrow$ că *a* este cifră nenulă pară.

Dacă a = 2 rezultă 98 = 2 $\sqrt{\overline{bc}}$, de unde 49 = $\sqrt{\overline{bc}}$, imposibil

Dacă a = 4 rezultă 96 = 2 $\sqrt{\overline{bc}}$, de unde 48 = $\sqrt{\overline{bc}}$, imposibil

Dacă a = 6 rezultă 94 = 2 $\sqrt{\overline{bc}}$, de unde 47 = $\sqrt{\overline{bc}}$, imposibil

Dacă a = 8 rezultă 92 = 2 $\sqrt{\overline{bc}}$, de unde 46 = $\sqrt{\overline{bc}}$, imposibil

deci nu există $\overline{abc}$ cu proprietatea dată.

13. Fie x, y, z >0. Calculaţi aria triunghiului ale cărui laturi au lungimile $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{y+z}$, $\sqrt{x+z}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău
Gazeta matematică (GM) nr. 7-8-9 / 2011, E: 14224

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.10*.

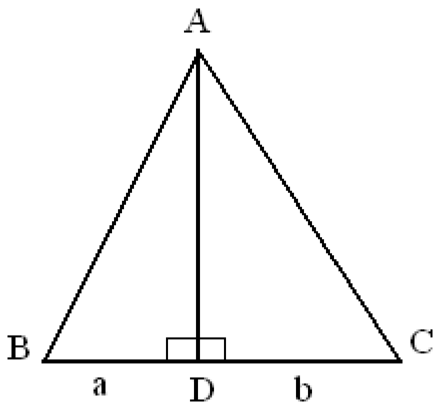


Figura III.10. Desenul problemei 13 (III.2)

Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$

Notăm : BD = a şi DC = b.

$AB = \sqrt{y+z}$, $BC = \sqrt{x+y}$, $AC = \sqrt{x+z}$.

În ΔADB dreptunghic, aplicăm teorema lui Pitagora pentru cateta AD:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \qquad (1)$$

În ΔADC dreptunghic, aplicăm teorema lui Pitagora pentru cateta AD:

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 \qquad (2)$$

Egalăm relaţiile (1) şi (2) şi obţinem:

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 \Rightarrow \left(\sqrt{y+z}\right)^2 - a^2 = \left(\sqrt{x+z}\right)^2 - b^2 \Leftrightarrow y+z-a^2 = x+z-b^2$$

$$\Leftrightarrow y-x = a^2 - b^2 \Rightarrow y-x = (a-b)\cdot(a+b) \Rightarrow y-x = (a-b)\cdot BC$$

$$y-x = (a-b)\cdot\sqrt{x+y} \Rightarrow a-b = \frac{y-x}{\sqrt{x+y}} \qquad (3)$$

Ştim că $a+b = \sqrt{x+y}$ (4)

Adunând membru cu membru relaţiile (3) şi (4) obţinem:

$$2a = \frac{y-x}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x+y}\text{, de unde } 2a = \frac{y-x+x+y}{\sqrt{x+y}} \Rightarrow a = \frac{y}{\sqrt{x+y}}.$$

În ΔADB dreptunghic, aflăm AD cu teorema lui Pitagora:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AD^2 = \left(\sqrt{y+z}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{x+y}}\right)^2 = y+z-\frac{y^2}{x+y} = \frac{xy+xz+y^2+yz-y^2}{x+y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{\frac{xy+xz+yz}{x+y}}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{BC\cdot AD}{2} = \sqrt{x+y}\cdot\sqrt{\frac{xy+xz+yz}{x+y}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{xy+xz+yz}}{2}.$$

14. Determinaţi numerele prime x, y, z astfel încât $x+\frac{y+z}{1+yz}=\frac{40}{7}$.

Ion Neaţă, Slatina, Olt
Gazeta matematică (GM) nr. 10 / 2011, E: 14249

Rezolvare:

$$\frac{y+z}{1+yz}=\frac{40}{7}-x \Leftrightarrow \frac{y+z}{1+yz}=\frac{40-7x}{7} \Leftrightarrow 7(y+z+x+xyz)=40(1+yz)$$

Deoarece 7 şi 40 sunt numere prime între ele, avem

a) $\begin{cases} y+z+x+xyz=40 \\ 1+yz=7 \end{cases}$ sau **b)** $\begin{cases} y+z+x+xyz=-40 \\ 1+yz=-7 \end{cases}$

a) Din a doua relaţie, obţinem yz = 6 şi ştiind că y şi z sunt numere prime obţinem cazurile:

I. y=2 şi z=3
Înlocuind în prima relaţie obţinem: 2+3+x+6x=40, de unde 7x=35, rezultă x=5

II. y=3 şi z=2
Deoarece prima relaţie este simetrică, vom obţine tot x=5

În textul problemei nu se specifică faptul că numerele sunt naturale, aşadar tratăm şi situaţia când pot fi numere întregi negative.

III. y= -2 şi z = -3
Înlocuind în prima relaţie obţinem: - 2 + (-3) + x + 6x = 40, de unde 7x = 45 şi $x \notin Z$

IV. y= -3 şi z = -2 va conduce tot la $x \notin Z$.

b) Din a doua relaţie, obţinem yz = - 8, dar ştiind că y şi z sunt numere prime nu avem nici un caz.
Rezultă: $(x, y, z) \in \{(5,2,3), (5,3,2)\}$.

15. Fie a, b numere reale diferite astfel încât $a-\sqrt{ab}$ şi $b-\sqrt{ab}$ sunt numere raţionale. Arătaţi ca a şi b sunt numere raţionale.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu-Severin
Gazeta matematică (GM) nr. 10 / 2011, E: 14252

Rezolvare: Ştim că dacă două numere sunt raţionale, atunci suma, diferenţa, produsul sau câtul lor va fi tot un număr raţional.

$$a-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})\in Q$$

$$b-\sqrt{ab}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b}-\sqrt{a})=-\sqrt{b}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})\in Q$$

Atunci

$$\frac{a-\sqrt{ab}}{b-\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{-\sqrt{b}}=k\in Q, \text{de unde } \sqrt{a}=-k\sqrt{b}$$

Înlocuim pe $\sqrt{a}$ astfel exprimat:

$$a-\sqrt{ab}=\left(-k\sqrt{b}\right)^2-\left(-k\sqrt{b}\right)\sqrt{b}=k^2b+kb=kb(k+1)\in Q$$

Deoarece $k\in Q$, atunci şi $k+1\in Q \Rightarrow b\in Q$ (1)

Facem un raţionament similar pentru a-l exprima pe $\sqrt{b}$.

$$\frac{a-\sqrt{ab}}{b-\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{-\sqrt{b}}=\frac{1}{t}\in Q, \text{cu } t\in Q^*, \text{de unde } \sqrt{b}=-t\sqrt{a}$$

Înlocuim pe $\sqrt{b}$ astfel exprimat:

$$a-\sqrt{ab}=a-\sqrt{a}(-t\sqrt{a})=a+at=a(t+1)\in Q$$

Deoarece $t\in Q^*$, atunci şi $t+1\in Q \Rightarrow a\in Q$ (2)

Din (1) şi (2) rezulta că a şi b sunt numere raţionale.

16. În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construieşte triunghiul dreptunghic BCM cu $m\left(\widehat{BCM}\right)=90^\circ$ şi $m\left(\widehat{CBM}\right)=30^\circ$. Dacă P este punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor ABC şi BMC, arătaţi că P este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Otilia Nemeş, Ocna Mureş, Alba
Gazeta matematică (GM) nr. 7-8-9 / 2011, E: 14230

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.11*.

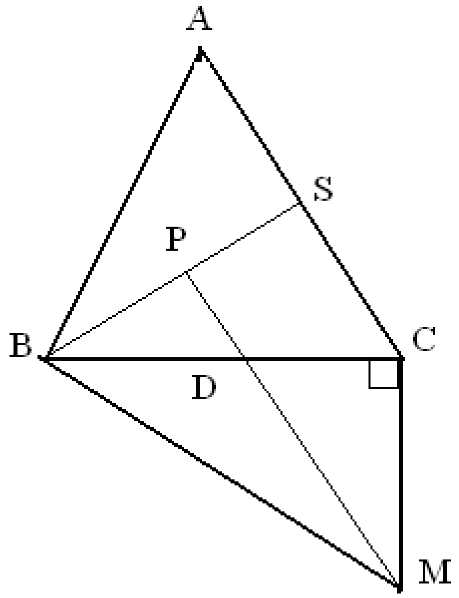


Figura III.11. Desenul problemei 16 (III.2)

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ echilateral}\\ BS \text{ bisectoare } \widehat{ABC}\end{array}\right| \Rightarrow BS \text{ este şi mediană.}$$

Dacă vom demonstra că punctul P se află la 2/3 din lungimea BS, faţă de B, atunci înseamnă că P este centrul de greutate al triunghiului ABC.
Vom calcula BP în funcţie de latura triunghiului echilateral.
Notăm AB = BC = AC = a

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BCM\\ m\left(\widehat{CBM}\right)=30^\circ\end{array}\right| \Rightarrow m\left(\widehat{BMC}\right)=60^\circ$$

$$[MP \text{ bisectoare } \widehat{BMC} \Rightarrow m\left(\widehat{BCP}\right)=m\left(\widehat{CMP}\right)=30^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BCM \text{ dr}\\ \cos 30^0=\dfrac{BC}{BM}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{BM} \Rightarrow BM=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BPM\\ m(\widehat{MBP})=60^0\\ m(\widehat{PMB})=30^0\end{array}\right| \Rightarrow \Delta BPM \text{ dreptunghic în P} \Rightarrow BP=\frac{BM}{2}=\frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BSC \text{ dr în S}\\ \cos 30^0=\dfrac{BS}{BC}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BS}{a} \Rightarrow BS=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dacă P ar fi centrul de greutate, atunci $BP=\frac{2}{3}\cdot BS=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că într-adevăr, P este centrul de greutate al triunghiului ABC.

III.3. ANUL 2012 ÎN PROBLEME

probleme propuse, adaptate de Ioana Dziţac

1. Calculaţi suma primelor 2012 numere naturale care nu sunt cuburi perfecte.

adaptare după E:14229 din GM 7-8-9/2011

Rezolvare:
Cuburile perfecte sunt 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, …,11^3 =1331, …, 12^3 =1728, 13^3 = 2197, 14^3 = 2744,...
În suma $1+2+3+...+2012$sunt 12 cuburi perfecte.
Adăugăm la sumă încă 12 numere şi scădem cuburile perfecte.
Obţinem: $1+2+3+...2012+...+2024-\left(1^3+2^3+3^3+...+12^3\right)$

Suma primelor *n* numere naturale: $1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$;

Suma cuburilor primelor *n* numere naturale: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$

$$\Rightarrow S=\frac{2024\cdot 2025}{2}-\left[\frac{12\cdot 13}{2}\right]^2=1012\cdot 2025-6084=2049300-6084=2043216$$

2. Este anul 2012 an bisect? Justificaţi.
Răspuns: 2012 este bisect, deoarece e divizibil cu 4.
Informaţii suplimentare:
Anii bisecţi sunt anii în care luna februarie are 29 de zile în loc de 28 de zile, iar anul are 366 de zile în loc de 365 de zile. Ziua suplimentară este necesară o dată la 4 ani, deoarece perioada de rotaţia a Pământului în jurul Soarelui nu este un număr întreg de zile, ci 365,2422 zile.
Calendarul Gregorian prezintă o regulă exactă a aproximării mai bune a perioadei de 365,2422 zile. Un an este bisect, dacă e divizibil cu 4, excepţie făcând cazurile când este divizibil cu 100, fără a fi divizibil cu 400.

3. Arătaţi că 2012 nu este cub perfect.

Rezolvare: $12^3=1728<2012<2197=13^3$, rezultă că există 2 cuburi consecutive între care se află 2012. Deci 2012 nu este cub perfect.

4. Arătaţi că: $\sqrt{X-2012\cdot Y}\in Q$,

unde $X=2+4+6+...+4022$, iar $Y=2011\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2012}\right)$.

Rezolvare: $X=2+4+6+...+4022=2\cdot(1+2+3+...+2011)=2011\cdot 2012$

$$Y=2011\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...\cdot\frac{2011}{2012}=\frac{2011}{2012}$$

Atunci: $\sqrt{X-2012\cdot Y}=\sqrt{2011\cdot 2012-2012\cdot\frac{2011}{2012}}=\sqrt{2011\cdot(2012-2011)}=\sqrt{2011^2}=2011\in Q$

5. Arătaţi că:
a) $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot 2012+2012}\in I$;
b) $\sqrt{2011^n+2012}\in I,\ \forall n\in N$;
c) $\sqrt{2^0+2^1+...+2^{2012}+2012}\in I$
Rezolvare:

a) $uc(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012)=0$ şi $uc(2012)=2$, atunci:
$uc\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012+2012)=2$, rezultă că $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012+2012$ nu poate fi pătrat perfect, deci $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012+2012}\in I$

b) $uc(2011^n)=1,\ \forall n\in N$ şi $uc(2012)=2$, atunci:
$uc(2011^n+2012)=3 \Rightarrow 2011^n+2012$ nu poate fi pătrat perfect, deci $\sqrt{2011^n+2012}\in I,\ \forall n\in N$

c) $2^0+2^1+...+2^{2012}=2^{2013}-1$
$uc(2^{2013}-1)=uc(2-1)=1$, 2013:4=503, rest=1 şi $uc(2012)=2$, atunci: $uc(2^{2013}-1+2012)=3$
$\Rightarrow\ 2011^n+2012$ nu poate fi pătrat perfect, deci $\sqrt{2^0+2^1+...+2^{2012}+2012}\in I$

6. Calculaţi: $\left[2012-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2012}{2013}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}\right).$

Rezolvare: $\left[\underbrace{1+1+1+...1}_{2012\text{ termeni}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2012}{2013}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}\right)=$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+...+\left(1-\frac{2012}{2013}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}\right)=1$$

7. Rezolvaţi în R ecuaţia: $\left|503\cdot 4^x-2012\right|+\left(y^2-2012\right)^2=0$

Rezolvare: Fiecare din termenii ecuaţiei sunt ≥ 0.
Pentru a avea loc egalitatea este necesar ca fiecare din termenii sumei să fie egal cu 0, adică:

$$\begin{cases}\left|503\cdot 4^x-2012\right|=0\\ \left(y^2-2012\right)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}503\cdot 4^x-2012=0\\ y^2-2012=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}503\cdot 4^x-503\cdot 4=0\\ y^2-\left(\sqrt{2012}\right)^2=0\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}4^x=4\\ \left(y-\sqrt{2012}\right)\cdot\left(y+\sqrt{2012}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\pm\sqrt{2012}\end{cases}$$

8. Determinaţi numerele de elemente raţionale ale mulţimii $A=\left\{\sqrt{0};\sqrt{1};\sqrt{2};\ ...;\sqrt{2012}\right\}$

Rezolvare: Elemente raţionale ale mulţimii A sunt de forma: $\sqrt{0};\sqrt{1};\sqrt{2^2};\ ...;\sqrt{44^2}$, ($44^2$=1936), deci un număr de 45 de elemente raţionale în mulţimea A.

9. Calculaţi: $E=\left[\left(7-3\sqrt{5}\right)^{2012}+\frac{1}{\left(7+3\sqrt{5}\right)^{2012}}\right]\cdot\frac{\left(14+6\sqrt{5}\right)^{2012}}{4^{2012}+1}.$

Rezolvare: $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

$$E=\left[\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)^{2012}\cdot\left(7+3\sqrt{5}\right)^{2012}+1}{\left(7+3\sqrt{5}\right)^{2012}}\right]\cdot\frac{\left[2\cdot\left(7+3\sqrt{5}\right)\right]^{2012}}{4^{2012}+1}=$$
$$=\frac{\left[\left(7-3\sqrt{5}\right)\cdot\left(7+3\sqrt{5}\right)\right]^{2012}+1}{\left(7+3\sqrt{5}\right)^{2012}}\cdot\frac{2^{2012}\cdot\left(7+3\sqrt{5}\right)^{2012}}{4^{2012}+1}=\frac{(49-9\cdot 5)^{2012}+1}{4^{2012}+1}\cdot 2^{2012}=2^{2012}$$

10. Simplificaţi: $A=\dfrac{2012+2012^2+2012^3+...+2012^{2011}}{\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2012^2}+\dfrac{1}{2012^3}+...+\dfrac{1}{2012^{2011}}}$.

Rezolvare: Amplific cu 2012^{2012}

$$A=\frac{2012^{2012}\cdot\left(2012+2012^2+2012^3+...+2012^{2011}\right)}{2012^{2012}\cdot\left(\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2012^2}+\dfrac{1}{2012^3}+...+\dfrac{1}{2012^{2011}}\right)}=$$

$$=\frac{2012^{2012}\cdot\left(2012+2012^2+2012^3+...+2012^{2011}\right)}{2012+2012^2+2012^3+...+2012^{2011}}=2012^{2012}$$

11. Fie $N=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\dfrac{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{\sqrt{2011}\cdot\sqrt{2012}}$.

a) Demonstraţi că $N\in(0;1)$

b) Aflaţi partea întreagă a numărului $\sqrt{2012}\cdot N$

Rezolvare:

a) $N=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+...+\dfrac{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{\sqrt{2011}\cdot\sqrt{2012}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2011}}-\dfrac{1}{\sqrt{2012}}$

$N=1-\dfrac{1}{\sqrt{2012}}=\dfrac{\sqrt{2012}-1}{\sqrt{2012}}\in(0;1)$, deoarece e fracţie subunitară, $\sqrt{2012}-1<\sqrt{2012}$

b) $\sqrt{2012}\cdot N=\sqrt{2012}\cdot\dfrac{\sqrt{2012}-1}{\sqrt{2012}}=\sqrt{2012}-1$

$44\le\sqrt{2012}<45\Rightarrow 43\le\sqrt{2012}-1<44\Rightarrow\left[\sqrt{2012}\cdot N\right]=43$

12. Fie $\mathbf{n}\in\mathbf{N^*}$. Să se arate că nr. 2012^n+1 nu poate fi scris ca sumă de două nr. prime.

adaptare după P.P.VI.1379., revista Alpha 2011

Rezolvare: Presupunem prin absurd că ar putea fi scris nr. 2012^n+1 ca sumă de două nr. prime. Avem:

$2012^n+1=p+q,\ p,q-\text{prime}$

- dacă p,q impare, p+q=par, dar 2012^n+1 este impar – imposibil
- dacă q=2, p = impar, avem $2012^n+1=$ p+2, deci $2012^n-1=p$

2012^n-1 nu este prim deoarece se poate descompune după formula:

$2012^n-1=(2012-1)\left(2012^{n-1}+2012^{n-2}+...+2012+1\right)=2011\left(2012^{n-1}+2012^{n-2}+...+2012+1\right)$

13. Calculaţi $1\cdot1!+2\cdot2!+...+2011\cdot2011!+2012\cdot2012!$, $n!=1\cdot2\cdot...\cdot n$, $n\in N^*$.

C.R.VI.2. Alpha, 2011

Rezolvare:

$$\sum_{k=1}^{2012}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{2012}(k+1-1)\cdot k!=\sum_{k=1}^{2012}(k+1)\cdot k!-\sum_{k=1}^{2012}k!=\sum_{k=1}^{2012}(k+1)!-\sum_{k=1}^{2012}k!=$$

$$=2!+3!+...+2012!+2013!-1!-2!-...-2012!=2013!-1$$

14. Arătaţi că: $\sqrt{2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012}}}<2012$.

Matematică pentru clasa a VII-a, I, Balica, Perianu, Săvulescu, ex. 37 pag.87

Rezolvare: se ridică la pătrat

$\sqrt{2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012}}}<2012$ ridic la pătrat

$2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012}}<2012^2$

$\sqrt{2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012}}<2012^2-2011\cdot 2012=2012\cdot(2012-2011)=2012$ ridic la pătrat

$2011\cdot 2012+\sqrt{2011\cdot 2012}<2012^2$

$\sqrt{2011\cdot 2012}<2012^2-2011\cdot 2012=2012\cdot(2012-2011)=2012$

ridic la pătrat

$2011\cdot 2012<2012^2 \Rightarrow 2011\cdot 2012<2012\cdot 2012$ adevărat

15. Se dau 2012 numere naturale distincte. Să se arate că, dacă suma oricăror 2011 numere naturale dintre ele este divizibilă cu 2012, atunci şi suma celor 2012 numere este divizibilă cu 2012.

Rezolvare:

Fie $x_1, x_2, ..., x_{2012} \in N$ cele 2012 numere naturale distincte.

Avem:

$$\begin{cases} x_2+x_3+...+x_{2012}=m_{2012}=2012\cdot k_1 \\ x_1+x_3+...+x_{2012}=m_{2012}=2012\cdot k_2 \\ .... \\ x_1+x_3+...+x_{2011}=m_{2012}=2012\cdot k_{2012} \end{cases} ,\quad k_i\in N,\ i=\overline{1,2012}$$

Adunând relaţiile membru cu membru, obţinem:

$2011\cdot(x_1+x_2+x_3+...+x_{2012})=2012\cdot(k_1+k_2+k_3+...+k_{2012})$

Cum 2011nu divide 2012, rezultă că $2011 | (k_1+k_2+k_3+...+k_{2012}) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x_1+x_2+x_3+...+x_{2012}=m_{2012}=2012\cdot k$

16. Dacă $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=2012$, arătaţi că: $A=\sqrt{(2012+x^4)\cdot(2012+y^4)\cdot(2012+z^4)}$ este număr raţional.

adaptare după E:14151 din GM nr. 3/2011

Rezolvare:.

$$2012+x^4=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+x^4=x^2\cdot(y^2+x^2)+z^2\cdot(y^2+x^2)=(x^2+z^2)\cdot(x^2+y^2)$$

$$2012+y^4=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+y^4=y^2\cdot(x^2+y^2)+z^2\cdot(y^2+x^2)=(y^2+z^2)\cdot(x^2+y^2)$$

$$2012+z^4=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+z^4=y^2\cdot(x^2+z^2)+z^2\cdot(z^2+x^2)=(y^2+z^2)\cdot(x^2+z^2)$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{(2012+x^4)\cdot(2012+y^4)\cdot(2012+z^4)}=\sqrt{(x^2+y^2)^2\cdot(x^2+z^2)^2\cdot(z^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{[(x^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)\cdot(z^2+y^2)]^2}=(x^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)\cdot(z^2+y^2)\in Q$$

III.4. PROBLEME UTILIZÂND DIFERITE PRINCIPII, METODE

Principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet

Principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet: “*Dacă repartizăm n+1 obiecte în n cutii, atunci cel puţin două obiecte vor fi în aceeaşi cutie*“.
***Forma generală a principiului lui Dirichlet*:** “*Dacă repartizăm kn+1 obiecte în n cutii, atunci cel puţin k+1 obiecte,* $k \in N$ *vor fi în aceeaşi cutie*“.

1. Masa festivă de Paşte organizată de FEE are 20 m lungime şi 12 m lăţime. La masă sunt aşezate 61 de persoane. Arătaţi că, oricum ar aşeza fiecare din cele 61 de persoane câte un obiect pe masă, există cel puţin două obiecte astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică de 3 m.

Concursul “Problema lunii”- aprilie – Fundaţia de Evaluare în Educaţie

Rezolvare: Împărţim masa sub formă de dreptunghi în pătrate cu latura de 2 m şi vor rezulta 60 de pătrate având fiecare diagonala egală cu $\sqrt{8} < 3$. Având 61 de obiecte, oricum le-am repartiza în cele 60 de pătrate, cel puţin două obiecte se vor afla în acelaşi pătrat şi, ca urmare vor fi la distanţă mai mică decât diagonala pătratului, adică la distanţă mai mică de 3 m.

2. Se dă ΔABC, echilateral, de latură 1 cm şi 37 de puncte aparţinând interiorului triunghiului. Se cere să se arate că există cel puţin două puncte, astfel încât distanţa dintre ele să nu depăşească 0,1(6) cm.
Rezolvare: Construim desenul din *figura III.12*.

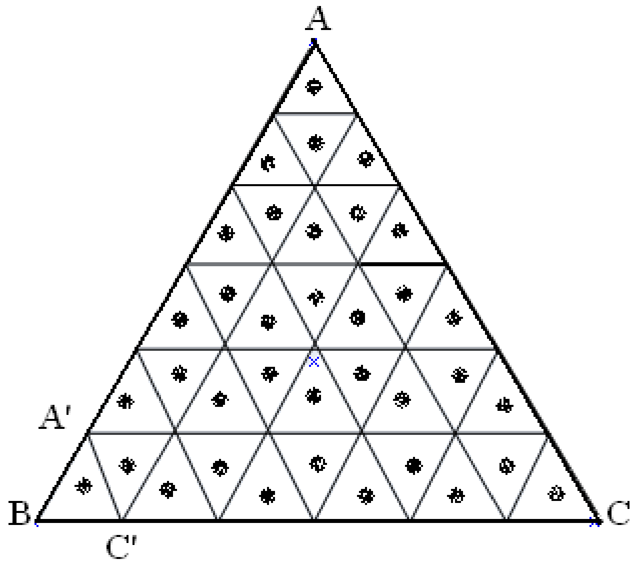


Figura III.12. Desenul problemei 2 (III.4)

Construim cel mult 36 de suprafeţe egale în care plasăm cele 37 de puncte.
Am împărţit latura triunghiului în şase părţi egale prin care am dus paralele la laturile triunghiului.
$\Rightarrow 1+3+5+7+9+11=36$ triunghiuri echilaterale congruente, de tipul $\Delta A'BC'$, conform teoremei paralelelor echidistante. Avem astfel, 36 triunghiuri congruente şi 37 de puncte, rezultă că cel puţin două puncte vor fi în interiorul unui triunghi sau pe laturile acestuia.
Latura unui triunghi mic, de exemplu $\Delta A'BC'$, este egală cu $\frac{1}{6}$, iar $0,1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{3}{30} = \frac{1}{6}$.
Prin urmare, distanţa maximă între două două puncte este când cele două puncte se află în vârfurile triunghiului, rezultă că există cel puţin două puncte, astfel încât distanţa dintre ele să nu depăşească 0,1(6) cm.
Generalizare: Pentru un ΔABC, echilateral, de latură 1 cm, cu n^2+1 puncte interioare triunghiului, există cel puţin două puncte care au distanţa dintre ele $\leq \frac{1}{n}$.

Principiul invariantului

Prin ***invariant*** se înţelege o mărime, o relaţie sau o proprietate care rămâne neschimbată în urma aplicării sau invarianţei unei transformări.

3. Simona (S) şi Julia (J) scriu pe tablă numere de la 1 la 200. Şterg câte un număr. Jocul ia sfârşit când rămân pe tablă numai două numere. Câştigă Simona, dacă suma celor două numere este divizibilă cu 3.

a) Cine este ultimul care şterge un număr, dacă Simona începe jocul?

b) Poate găsi Simona o cale de a câştiga, dacă Julia începe?

Rezolvare:

a) Fie 1, 2, 3, …, 200 cele 200 numere.

Începe jocul, Simona şi Julia iau câte un număr, deci rămân 198 de numere, care se împart la numărul de jucătoare: $198:2=99$ de perechi de câte două numere.

$\underbrace{(S,J);\ (S,J);\ (S,J);...(S,J)}_{99\text{ ori}} \Rightarrow$ Julia şterge ultimul număr.

b) Dacă rămân $a,b\in N$, $1\le a\le 200$, $1\le b\le 200$. Dacă $(a+b)\vdots 3 \Rightarrow$ Simona câştigă.

1, 2, 3, 4, 5,…,197, 198, 199, 200

$$\left.\begin{array}{l} 1+200=201 \\ 2+199=201 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right| \Rightarrow a+b=201 \Rightarrow \text{că invariantul este } 201.$$

Julia şterge numărul x, deci Simona va trebui să şteargă numărul 201-x.

De exemplu, Julia şterge numărul 197, Simona va şterge numărul 201-1997 = 4.

În final, rămân două numere y şi 201-y a căror sumă y+201-y = 201 este divizibilă cu 3.

4. Considerăm un număr natural de patru cifre căruia îi schimbăm ordinea cifrelor. E posibil ca diferenţa dintre numărul iniţial şi cel final să fie 2012?

Rezolvare:

$$\overline{abcd}-\overline{acbd}=1000a+100b+10c+d-1000a-100c-10b-d=90b-90c=90\cdot(b-c)\neq 2012$$

$$\overline{abcd}-\overline{bcda}=1000a+100b+10c+d-1000b-100c-10d-a=9\cdot(111a-100b-10c-d)\neq 2012$$

Cifrele numărului schimbat rămân aceleaşi, rezultă că invariantul este legat de o proprietate a sumei cifrelor. Suma cifrelor se aplică în cazul criteriilor de divizibilitate cu 3 sau 9.

Restul împărţirii unui număr la 9 este acelaşi cu restul împărţirii sumei cifrelor sale la 9.

Fie N = numărul iniţial pe care-l împărţim la 9 $\Rightarrow N=9\cdot C_1+r$, unde C_1, r sunt câtul, respectiv restul împărţirii lui N la 9, din teorema împărţirii cu rest.

Schimbăm ordinea cifrelor în N, obţinem numărul N_1 pe care-l împărţim la 9, $\Rightarrow N_1=9\cdot C_2+r$, unde C_2, r sunt câtul, respectiv restul împărţirii lui N_1 la 9, din teorema împărţirii cu rest.

$N-N_1=9\cdot C_1+r-9\cdot C_2-r=9\cdot(C_1-C_2)\in M_9$

$2012\notin M_9 \Rightarrow$ că 2012 nu poate fi diferenţa dintre numărul iniţial şi cel final, adică $N-N_1$.

Probleme rezolvabile cu metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată propoziţia contradictorie propoziţiei de demonstrat, apoi pe baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecinţe care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic ipoteza problemei date sau un adevăr stabilit anterior.

Exemplu, problema 8, *paragraful III.2*.

5. În triunghiul ABC construim $AD \perp BC, D \in (BC)$. Ştiind că $m\left(\widehat{C}\right) = 75^\circ$, $AD = 4\text{cm}$, $BC = 16\text{cm}$, demonstraţi că ΔABC este dreptunghic.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.13.*

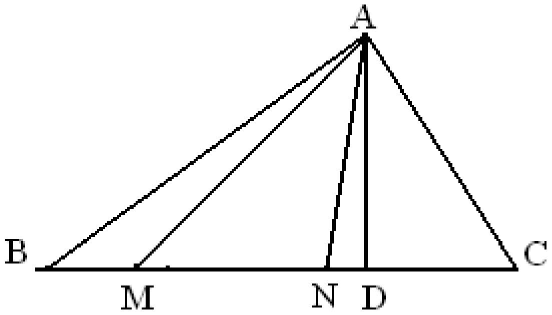


Figura III.13. Desenul problemei 5 (III.4)

Reducem la metoda reducerii la absurd. Presupunem că ΔABC nu este dreptunghic, prin urmare presupunem că ΔABC este obtuzunghic $\Rightarrow \exists M \in BC$, astfel încât $MA \perp AC$.

Fie N mijlocul segmentului $MC \Rightarrow [AN$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei MC, în ΔMAC dreptunghic $\Rightarrow AN = \dfrac{MC}{2} \Rightarrow [AN] \equiv [MN] \equiv [NC]$.

$$m\left(\widehat{AMC}\right) = 180^\circ - \left(90^\circ + 75^\circ\right) = 15^\circ$$

Triunghiurile MNA şi ANC sunt isoscele $\Rightarrow m\left(\widehat{NMA}\right) = m\left(\widehat{MAN}\right) = 15^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{MNA}\right) = 150^\circ \Rightarrow$

$m\left(\widehat{ANC}\right) = 30^\circ$, iar ΔADN dreptunghic $\overset{T30^\circ-60^\circ-90^\circ}{\Rightarrow} AN = 2 \cdot AD = 8\text{cm},\ AN = NC,\ MN = 8\text{cm}$,

$\Rightarrow MC = 8 + 8 = 16\text{cm} \Rightarrow$ *ABSURD*, deoarece MC<BC, BC=16 cm, deci presupunerea făcută este falsă, prin urmare ΔABC este dreptunghic.

Principiul extremal

Principiul extremal sau metoda variaţională: Acest principiu presupune folosirea obiectului care maximizează sau minimizează o anumită funcţie şi care are astfel de proprietăţi urmărite. Există situaţii în care să nu existe element extremal.

6. Arătaţi că oricum am aşeza numerele de la 1 la 10 într-un cerc, există trei numere alăturate cu suma mai mare sau egală cu 18.

Marius Mânea, Olimpiada Naţională de Matematică

Rezolvare: Presupunem că suma oricăror trei numere alăturate este cel mult 17. Eliminându-l pe cel mai mic, adică pe 1, celelalte 9 numere pot fi împărţite în trei grupe de câte trei numere alăturate, fiecare având, conform presupunerii făcute, suma cel mult 17. Prin urmare, suma numerelor de pe cerc este cel mult egală cu $1 \cdot 3 \cdot 17 = 52$, ceea ce vine în contradicţie cu suma gauss a primelor 10 numere: $1 + 2 + 3 + ... + 10 = \dfrac{10 \cdot 11}{2} = 55$.

Rezultă că oricum am aşeza numerele de la 1 la 10 într-un cerc, există trei numere alăturate cu suma mai mare sau egală cu 18.

Probleme de logică

Problemele de logică se realizează printr-o serie de judecăţi logice care solicită perspicacitate, inventivitate şi puţin calcul.

7. Dacă Popeye într-o zi se trezeşte zâmbăreţ, atunci în ziua următoare se va trezi bucuros. Dacă el într-o zi se trezeşte bucuros, atunci în ziua următoare el se va trezi fericit. Dacă într-o zi Popeye se trezeşte fericit, atunci în ziua următoare el se trezeşte voinic. Dacă se trezeşte într-o zi voinic, atunci în următoarea zi se trezeşte puternic. Dacă într-o zi Popeye se trezeşte puternic, atunci ziua următoare se va trezi zâmbăreţ.

a) Cum se va trezi Popeye în 7 mai 2011, dacă în 6 octombrie 2010 s-a trezit fericit?

b) Care zi a săptămânii a fost 1 octombrie 2010, dacă 7 mai 2011 a fost zi de sâmbăta?

Concursul Sclipirea minţii, clasa a VII-a, Oradea, 2011

Rezolvare:

a) Zâmbăreţ, bucuros, fericit, voinic, puternic,…, se repetă din 5 în 5.

Din 6 octombrie 2010 până în 31 octombrie sunt: 31-5 = 26 zile.

Din 6 octombrie 2010 până în 7 mai 2011 sunt: 26 + 30 + 31 + 31 + 28 + 31 + 30 + 7 = 214 zile.

Fiindcă se repetă din 5 în 5, avem: 214: 4 = 42 rest 4, deci $214 = 42 \cdot 5 + 4$.

În ziua cu numărul de ordine de forma 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+5, unde $k \in N$, Popeye se va trezi respectiv fericit, voinic, puternic, zâmbăreţ, bucuros. În ziua a 214-a se trezeşte ***zâmbăreţ***.

b) Din 1 octombrie 2010 până în 7 mai 2011 sunt 219 zile: 219:7 = 31, rest 2, $219 = 31 \cdot 7 + 2$.

Sâmbătă, vineri, joi, miercuri, marţi, luni, duminică are numărul de ordine, respectiv, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6, 7k+7, unde $k \in N$, deci 1 octombrie 2010 a fost vineri.

Cerinţe suplimentare propuse spre rezolvare:

a) Cum se va trezi Popeye în 7 mai 2012, dacă în 6 octombrie 2011 s-a trezit fericit?

b) Care zi a săptămânii a fost 1 octombrie 2011, dacă 7 mai 2012 a fost zi de luni?

Indicaţie: anul 2012 este an bisect.

Probleme de coliniaritate

Metode folosite în problemele de coliniaritate:

Metoda 1: Probleme în rezolvarea cărora se foloseşte ***axioma lui Euclid:*** *Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă*;

Metoda 2: Probleme în care intervin în rezolvare două sau mai multe unghiuri adiacente cu proprietatea că unghiul sumă al lor este un unghi alungit (180°);

Metoda 3: Probleme în care se folosesc proprietăţile unghiurilor opuse la vârf, de exemplu:

Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf: *Dacă două unghiuri congruente au o pereche de laturi semidrepte opuse, atunci şi celelalte perechi de laturi sunt semidrepte opuse*;

Teorema: *Dacă două unghiuri sunt congruente şi au o latură comună, iar celelalte două laturi sunt în acelaşi semiplan determinat de latura comună, atunci celelalte două laturi coincid.*

Metoda 4: Probleme în care se foloseşte ***teorema:*** *Într-un plan dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce pe acea dreaptă o perpendiculară şi numai una.*

Metoda 5: Probleme în care se va identifica o dreaptă care conţine punctele considerate.

În problemele de coliniaritate se mai folosesc *(figura III.14)*:

Teorema lui Menelaus: Fie ABC un triunghi şi d o dreaptă ce intersectează laturile (AB), (AC) şi prelungirea lui $(BC$ în punctele P, N, respectiv M (puncte coliniare). Atunci:

$$\boxed{\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1}$$

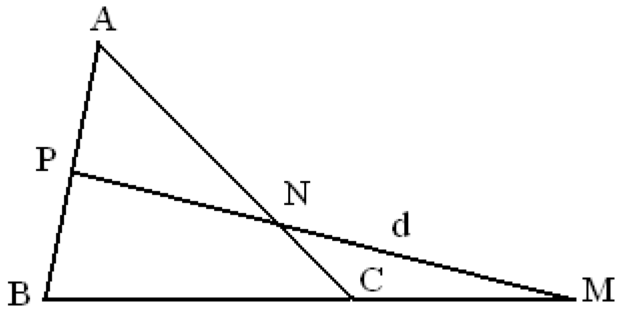


Figura III.14. Desenul justificativ pentru teorema lui Menelaus şi reciproca acesteia

Reciproca teoremei lui Menelaus: Fie triunghiul ABC, M aparţine lui (BC, N aparţine (AC) şi P aparţine lui (AB), astfel încât

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1.$$

Atunci, punctele M, N, P sunt coliniare.

8. Să se demonstreze că, într-un triunghi ABC, simetricele vârfurilor ABC faţă de laturile $[AC]$, respectiv $[AB]$ sunt coliniare cu vârful A.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.15.*

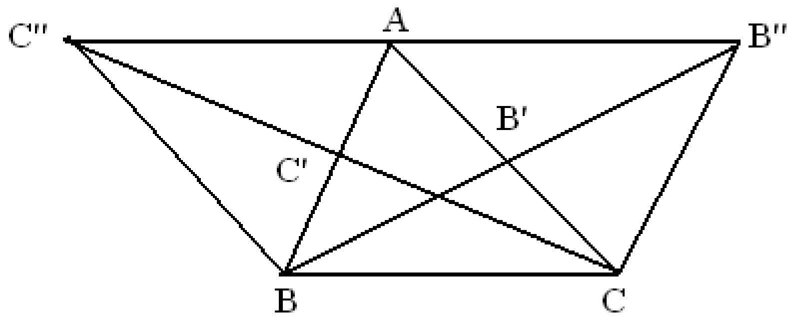


Figura III.15. Desenul problemei 8 (III.4)

Fie B'' şi C'' simetricele vârfurilor B şi C faţă de mijloacele B' şi C' ale laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$.

Deoarece $\begin{cases}[AB']\equiv[B'C]\\ [BB']\equiv[B'B'']\end{cases}\Rightarrow ABCB''\text{ este paralelogram }\Rightarrow AB''\parallel BC$ (1)

Deoarece $\begin{cases}[AC']\equiv[C'B]\\ [CC']\equiv[C'C'']\end{cases}\Rightarrow ACBC''\text{ este paralelogram }\Rightarrow AC''\parallel CB$ (2)

Din *relaţiile (1) şi (2)* rezultă că prin vârful A trec două paralele la BC, adică AB'', AC''

Cum cele două paralele coincid, $AB''\parallel BC\parallel AC''$, conform axiomei lui Euclid, rezultă că punctele B'', A, C'' sunt coliniare.

9. Două cercuri sunt secante în M şi N. Prin M se duc diametrele $[MP]$, respectiv $[MQ]$, în cele două cercuri $C_1(O_1;R)$, $C_2(O_2;r)$. Să se demonstreze că punctele P, N, Q sunt coliniare.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.16.*

Deoarece $\widehat{MNP}$ subântinde un diametru al cercului $C_1(O_1;R)\Rightarrow m\left(\widehat{MNP}\right)=90^\circ$. (*)

Deoarece $\widehat{MNQ}$ subântinde un diametru al cercului $C_2(O_2;r)\Rightarrow m\left(\widehat{MNQ}\right)=90^\circ$. (**)

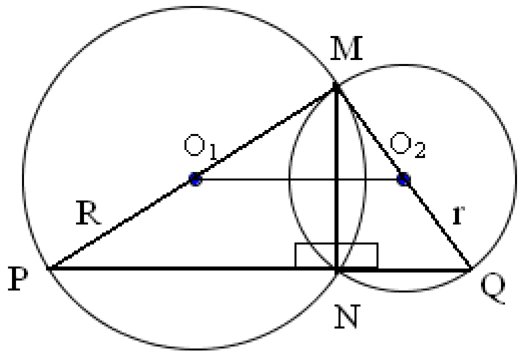


Figura III.16. Desenul problemei 9 (III.4)

Din *relaţiile (*) şi (**)* rezultă că: $m\left(\widehat{PNQ}\right)=m\left(\widehat{PNM}\right)+m\left(\widehat{QNM}\right)=90^\circ+90^\circ=180^\circ$, deci punctele P, N, Q sunt coliniare.

10. În patrulaterul ABCD se consideră M şi N mijloacele laturilor opuse $[AB]$, respectiv $[CD]$. Prin M ducem MP paralelă la BC şi MQ paralelă la AD, iar prin vârfurile C şi D câte o paralelă la AB. Se formează astfel patrulaterele BCPM şi ADQM. Să se demonstreze că punctele P, Q, N sunt coliniare.
Rezolvare: Construim desenul din *figura III.17*.

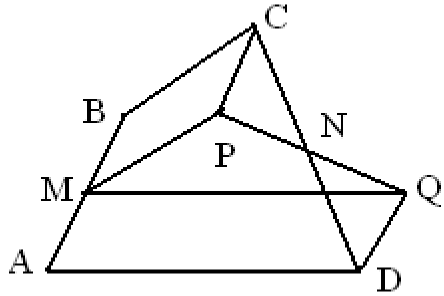


Figura III.17. Desenul problemei 10 (III.4)

Din ipoteză $\begin{cases} MP \parallel BC \\ CP \parallel BA \end{cases} \Rightarrow BCPM$ este paralelogram $\Rightarrow [BM]\equiv[CP]$ (1)

Din ipoteză $\begin{cases} MQ \parallel AD \\ DQ \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MQDA$ este paralelogram $\Rightarrow [AM]\equiv[DQ]$ (2)

Din *relaţiile (1) şi (2)* rezultă că, deoarece $\begin{cases} CP \parallel AB \\ DQ \parallel AB \end{cases} \Rightarrow CP \parallel DQ \Rightarrow m\left(\widehat{NCP}\right)=m\left(\widehat{NDQ}\right)$, unghiuri alterne interne. (3)

Din ipoteză, $\begin{cases} [AM]\equiv[MB] \\ [DN]\equiv[NC] \end{cases}$ (4)

Din *relaţiile (1) ÷ (4)* $\overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta NCP \equiv \Delta NDQ \Rightarrow m\left(\widehat{CNP}\right)=m\left(\widehat{DNQ}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{PNQ}\right)=m\left(\widehat{PNC}\right)+m\left(\widehat{CNQ}\right)=m\left(\widehat{PND}\right)+m\left(\widehat{DNQ}\right)=m\left(\widehat{DNQ}\right)+m\left(\widehat{CNQ}\right)=180^\circ.$$

Deoarece C, N, D sunt coliniare $\Rightarrow$ că şi punctele P, N, Q sunt coliniare.

11. Fie ABC şi ADE două triunghiuri isoscele şi laturile congruente una în prelungirea celeilalte. Să se arate că mijloacele bazelor celor două triunghiuri şi vârful lor comun sunt trei puncte coliniare.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.18*.

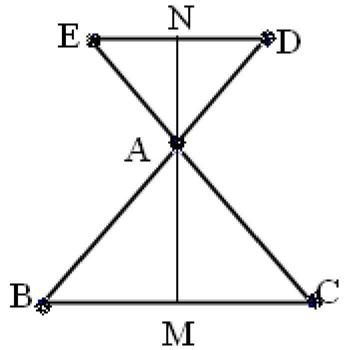


Figura III.18. Desenul problemei 11 (III.4)

Fie M şi N mijloacele bazelor celor două triunghiuri.

Prin urmare, $[BM]\equiv[MC]$ şi $[EN]\equiv[ND]$. Rezultă că:

- $[AM]$ este mediană în ΔABC isoscel, deci şi înălţime: $AM\perp BC$;
- $[AN]$ este mediană în ΔADE isoscel, deci şi înălţime: $AN\perp DE$;
- $m\left(\widehat{BAC}\right)=m\left(\widehat{DAE}\right)$ (opuse la vârf).

În $\Delta ABC \Rightarrow m\left(\widehat{C}\right)=\dfrac{180^\circ - m\left(\widehat{BAC}\right)}{2}$, iar în $\Delta ADE \Rightarrow m\left(\widehat{E}\right)=\dfrac{180^\circ - m\left(\widehat{DAE}\right)}{2}$, prin urmare, rezultă că $m\left(\widehat{C}\right)=m\left(\widehat{E}\right)\Rightarrow BC\parallel ED$, dar $AM\perp BC\Rightarrow AM\perp ED$. Cum însă $AN\perp DE\Rightarrow$ că AM şi AN coincid, prin urmare punctele M, A, N sunt coliniare.

12. În *figura II.19*, se cunoaşte că: $[AC]\equiv[BC]$, $[AE]\equiv[BE]$, $[AD]\equiv[BD]$. Arătaţi că punctele C, D, E sunt coliniare.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.19*.

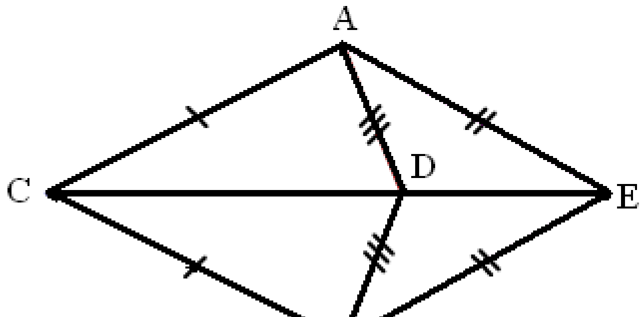


Figura III.19. Desenul problemei 12 (III.4)

Din ipoteză $\Rightarrow \Delta ADC\equiv\Delta BDC\,(LLL)\Rightarrow m\left(\widehat{ACD}\right)=m\left(\widehat{BCD}\right)\Rightarrow [CD$ bisectoarea $\widehat{ACB}$.

Din ipoteză $\Rightarrow \Delta ACE\equiv\Delta BCE\,(LLL)\Rightarrow m\left(\widehat{ACE}\right)=m\left(\widehat{BCE}\right)\Rightarrow [CE$ bisectoarea $\widehat{ACB}$.

Deoarece $\widehat{ACB}$ are o singură bisectoare, $\Rightarrow [CD=[CE\Rightarrow$ că punctele C, D, E sunt coliniare.

13. Se consideră triunghiul ABC şi $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât $DB = \frac{5}{7}AB$. Fie $CD \cap BE = \{M\}$, astfel încât $DM = \frac{2}{9}DC$. Demonstraţi că DE || BC.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.20*.

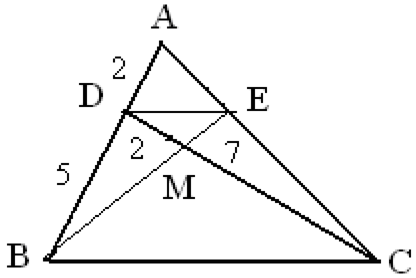


Figura III.20. Desenul problemei 13 (III.4)

În ΔADC aplicăm teorema lui Menelaus:

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DB}{BA}=1 \Rightarrow \frac{AE}{EC}\cdot\frac{7}{27}\cdot\frac{5}{7}=1 \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{2}{5}$$. Cum şi $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{5}$, rezultă că DE || BC.

Probleme de concurenţă

Metode folosite în problemele de concurenţă:

Metoda 1: Se demonstrează concurenţa dreptelor prin identificarea acestora cu liniile importante dintr-un triunghi.

Metoda 2: Se demonstrează că punctul de intersecţie a două dintre drepte aparţine şi celei de a treia drepte.

Metoda 3: Se demonstrează concurenţa prin coliniaritate.

În problemele de concurenţă se mai folosesc *(figura III.21)*:

Teorema lui Ceva: Fie ABC un triunghi şi dreptele AA', BB', CC', astfel încât $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci are loc relaţia:

$$\boxed{\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1}$$

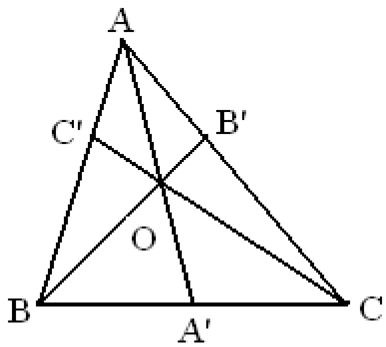


Figura III.21. Desenul justificativ pentru teorema lui Ceva

Reciproca teoremei lui Ceva: Fie ABC un triunghi şi dreptele AA', BB', CC', astfel încât $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$. Dacă are loc relaţia

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1,$$

atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Reciproca teoremei lui Ceva sub formă trigonometrică: Fie ABC un triunghi şi dreptele AA', BB', CC', astfel încât $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$. Dacă are loc relaţia

$$\frac{\sin \widehat{BAB'}}{\sin \widehat{CAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACC'}}{\sin \widehat{BCC'}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = 1,$$

atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

14. Se dă triunghiul ABC. Demonstraţi că bisectoarea interioară unghiului A şi bisectoarele exterioare ale unghiurilor B şi C sunt concurente.
Rezolvare: Construim desenul din *figura III.22*.

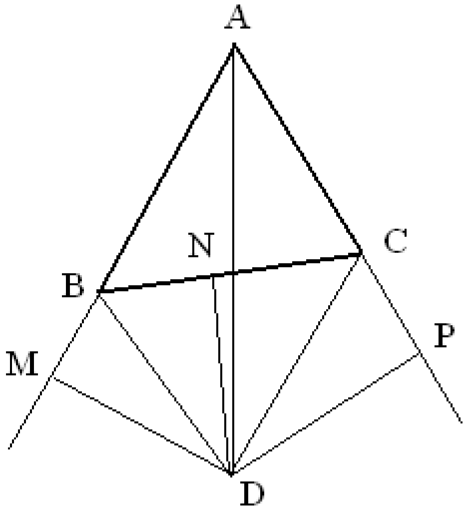


Figura III.22. Desenul problemei 14 (III.4)

Fie D punctul de intersecţie al bisectoarelor exterioare unghiurilor B şi C. Construim $DM \perp AB$, $DN \perp BC$, $DP \perp AC$. Rezultă că: $\Delta BMD \equiv \Delta BND \ (IU) \Rightarrow [DM] \equiv [DN]$ şi

$\Delta APD \equiv \Delta AMD \ (IC) \Rightarrow \widehat{MAD} \equiv \widehat{PAD} \Rightarrow (AD$ bisectoarea $\widehat{BAC}$

15. În ΔABC, fie un punct M pe latura $[BC]$. Bisectoarea unghiului ABM, intersectează latura $[AC]$ în punctul N. MP este bisectoarea unghiului AMB, iar MN este bisectoarea unghiului AMC. Demonstraţi că AM, BN, CP sunt concurente.
Rezolvare: Construim desenul din *figura III.23*.

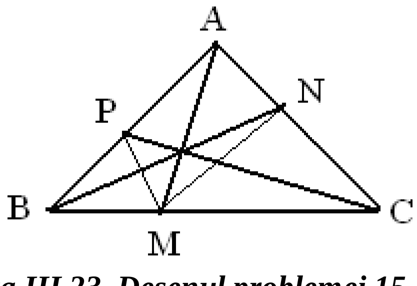


Figura III.23. Desenul problemei 15 (III.4)

Aplicăm teorema bisectoarei în $\Delta AMB : \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BM}$.

Aplicăm teorema bisectoarei în $\Delta AMC : \frac{CN}{NA} = \frac{CM}{AM}$. Înmulţind relaţiile membru cu membru şi cu $\frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CM}{AM} \Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ şi, conform teoremei lui Ceva, dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

16. Utilizând desenul din figura III.24, în care ABCD este un trapez, iar triunghiurile AMD şi BNC sunt echilaterale, $BD \cap AC = \{O\}$, să se demonstreze că $BD \cap AC \cap MN = \{O\}$.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.24.*

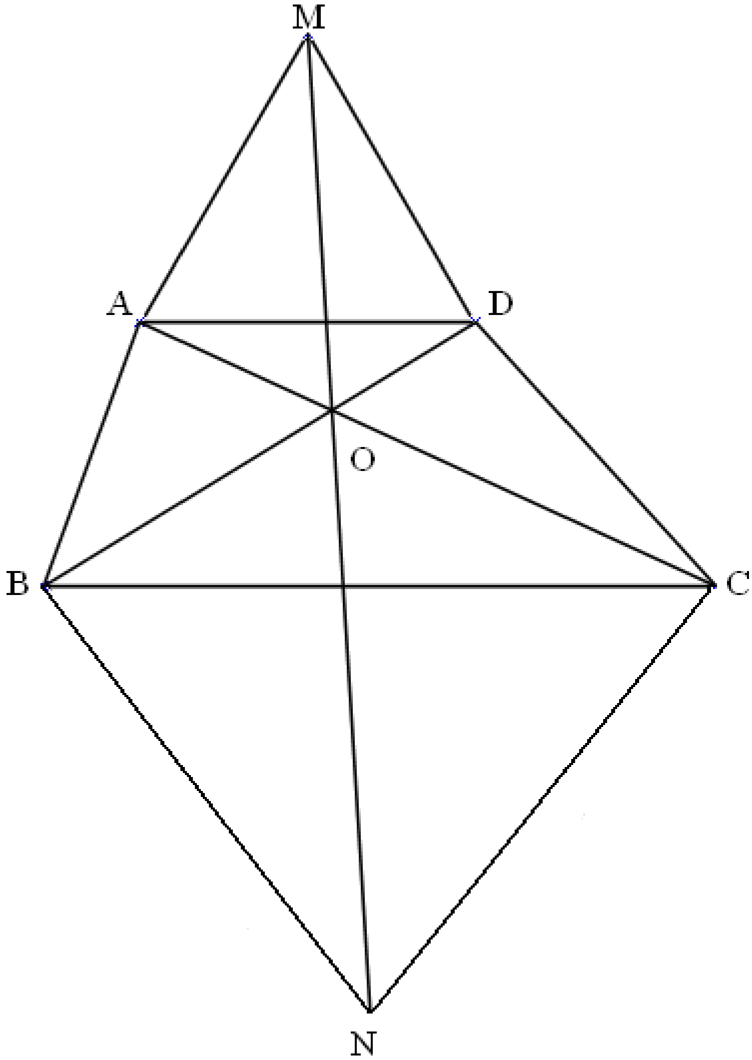


Figura III.24. Desenul problemei 16 (III.4)

$$\text{Cum } AD \parallel BC \Rightarrow \Delta AOD \sim \Delta COB \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ADM \text{ echilateral} \Rightarrow AD = MD \\ \Delta BNC \text{ echilateral} \Rightarrow BC = BN \end{array}\right| \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{MD}{BN} = \frac{DO}{BO}$$

$$AD \parallel BC, BD - \text{secantă} \Rightarrow m\left(\widehat{ADB}\right) = m\left(\widehat{DBC}\right) = x^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\widehat{MDO}\right) = m\left(\widehat{NBO}\right) = 60^\circ + x^\circ \\ \dfrac{MD}{BN} = \dfrac{DO}{BO} \end{array}\right| \Rightarrow \Delta MDO \sim \Delta NBO \Rightarrow \widehat{BON} \equiv \widehat{DOM}, \ (OD, (OB \text{ în prelungire}$$

$\Rightarrow$ conform reciprocei teoremei unghiurilor opuse că $(OM, (ON$ sunt în prelungire, deci punctele M, O, N sunt coliniare.

Cum $O \in MN$, $O \in DB$, $O \in AC \Rightarrow BD \cap AC \cap MN = \{O\}$

III.5. PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ŞCOLARE

III.5.1. PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ŞCOLARE REZOLVATE

1. Arătaţi că: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2012^2}<\frac{2011}{2012}$.

Rezolvare:.

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$

....

$\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{2011\cdot 2012}$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+....+\frac{1}{2011\cdot 2012}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2012}\Rightarrow\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2012^2}<\frac{2011}{2012}$$

2. a) Fie $a,b,c\in Q^*$, astfel încât $\frac{a}{2b+3c}=\frac{2b}{a+3c}=\frac{3c}{a+2b}$. Determinaţi valoarea expresiei $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$**.**

b) Arătaţi că fracţia $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n+1)+1}$ este ireductibilă pentru orice $n\in N^*$.

Rezolvare:

a) $\frac{a}{2b+3c}=\frac{2b}{a+3c}=\frac{3c}{a+2b}=\frac{a+2b+3c}{2\cdot(a+2b+3c)}=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}\frac{a}{2b+3c}=\frac{1}{2}\\ \frac{2b}{a+3c}=\frac{1}{2}\\ \frac{3c}{a+2b}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=2b+3c\\ 4b=a+3c\\ 6c=a+2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-4b=2b+3c-a-3c\\ 2a-6c=2b+3c-a-2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\ a=3c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{b}=\frac{2}{a}\\ \frac{1}{c}=\frac{3}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{a}{2}\\ c=\frac{a}{3}\end{cases}.$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=\frac{6}{a}$

$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{6}{a}=\frac{11\cdot a}{6}\cdot\frac{6}{a}=11$

b) notez $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n=a\Rightarrow\frac{a+1}{a(n+1)+1}=\frac{a+1}{an+a+1}$

Dacă fracţia este reductibilă , există $d\neq 1,\ d|a+1,\ d|an+a+1-a-1\Rightarrow d|a$

Dar, $d|a+1\Rightarrow d|1$, contradicţie.

3. a) Arătaţi că mulţimea $A=\left\{\frac{n+1000}{n+17}\middle| n\in N\right\}$ conţine un singur element natural.

b) Arătaţi că pentru orice număr $n\in N$, numerele $\frac{5n+2007}{8}$ şi $\frac{11n-2006}{8}$ nu pot fi simultan întregi.

Rezolvare:

a) $\frac{n+1000}{n+17}=\frac{n+17+983}{n+17}=1+\frac{983}{n+17}$, 983 este număr prim

$n+17=1\Rightarrow n=-16\notin N$

$n+17=983\Rightarrow n=966\in N$

b) $\frac{5n+2007}{8}=\frac{5n+8\cdot 25+7}{8}=25+\frac{5n+7}{8}\in Z\Leftrightarrow 8\mid 5n+7$, iar

$\frac{11n-2006}{8}=\frac{11n-8\cdot 25-6}{8}=-25+\frac{11n-6}{8}\in Z\Leftrightarrow 8\mid 11n-6$.

De exemplu,

- pentru $n=2k, 5n+7=10k+7=\text{impar}, 11n-6=22k-6=2\cdot(11k-3)$ imposibil.
- pentru $n=2k+1, 5n+7=10k+12=2\cdot(5k+6)\text{par}, 11n-6=22k-5=\text{impar}$, imposibil.

4. Fie $n\in N^*$ şi numerele $a=3^{n+2}-3^{n+1}$, $b=3^{n+2}-3^{n+1}+3^n$, $c=3^{n+1}-3^n+3^{n-1}$.

a) Calculaţi : $\frac{b+c}{a}$;

b) Stabiliţi, dacă numerele a,b,c pot fi laturile unui triunghi.

Rezolvare:

a) $a=3^{n+2}-3^{n+1}=3^n\cdot 3^2-3^n\cdot 3=3^n\cdot 6$;

$b=3^{n+2}-3^{n+1}+3^n=3^n\cdot 3^2-3^n\cdot 3+3^n=3^n\cdot 7$;

$c=3^{n+1}-3^n+3^{n-1}=3^n\cdot 3-3^n+3^n\cdot 3^{-1}=3^n\cdot\left(3-1+\frac{1}{3}\right)=3^n\cdot\frac{7}{3}$;

$$\Rightarrow\frac{b+c}{a}=\frac{3^n\cdot 7+3^n\cdot\frac{7}{3}}{3^n\cdot 6}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9}.$$

b) $\begin{cases}\frac{b+c}{a}=\frac{14}{9}>1\Rightarrow b+c>a\\ \frac{a+c}{b}=\frac{25}{21}>1\Rightarrow a+c>b\\ \frac{a+b}{c}=\frac{39}{7}>1\Rightarrow a+b>c\end{cases}\Rightarrow$ a,b,c pot fi laturile unui triunghi.

5. Determinaţi perechile de numere reale (a,b) care îndeplinesc condiţia:

$\sqrt{a-b-3}+\sqrt{b^2-9b+3a}=\sqrt{3+b-a}+5$.

Rezolvare:

Impunem condiţiile radicalilor: $\begin{cases}a-b-3\geq 0\\ 3+b-a\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b\geq 3\\ b-a\geq -3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b\geq 3\\ a-b\leq 3\end{cases}\Rightarrow a-b=3\Rightarrow a=b+3$.

Ecuaţia devine:

$0+\sqrt{b^2-9b+3b+9}=5\Rightarrow\sqrt{b^2-6b+9}=5\Rightarrow\sqrt{(b-3)^2}=5\Rightarrow b-3=\pm 5\Rightarrow$

$b\in\{-2;8\}\Rightarrow a\in\{1;11\}\Rightarrow(a,b)=\{(1,-2);(11,8)\}$.

6. a) Demonstraţi că $\sqrt{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}} \notin Q, \forall a,b,c \neq 0$.

b) Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$, pentru care $3\sqrt{\overline{a,(bc)}+\overline{b,(ca)}+\overline{c,(ab)}} = \overline{ab}$.

Rezolvare:

a) $a,b,c \neq 0 \Rightarrow$

$$n = \sqrt{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}} = \sqrt{111\cdot a+111\cdot b+111\cdot c} = \sqrt{111\cdot(a+b+c)} = \sqrt{3\cdot 37\cdot(a+b+c)}$$

$3 < a+b+c \leq 27 \Rightarrow 37\,|n$; 37^2 nu divide $n \Rightarrow \sqrt{n} \notin Q$.

b) $3\sqrt{\overline{a,(bc)}+\overline{b,(ca)}+\overline{c,(ab)}} = \overline{ab}$

$$\begin{cases} \overline{a,(bc)} = a\dfrac{\overline{bc}}{99} = \dfrac{99a+\overline{bc}}{99} = \dfrac{99a+10b+c}{99} \\ \overline{b,(ca)} = b\dfrac{\overline{ca}}{99} = \dfrac{99b+\overline{ca}}{99} = \dfrac{99b+10c+a}{99} \\ \overline{c,(ab)} = c\dfrac{\overline{ab}}{99} = \dfrac{99c+\overline{ab}}{99} = \dfrac{99c+10a+b}{99} \end{cases} \Rightarrow \text{ prin adunarea relaţiilor:}$$

$$\overline{a,(bc)}+\overline{b,(ca)}+\overline{c,(ab)} = \frac{110\cdot(a+b+c)}{99} = \frac{10\cdot(a+b+c)}{9}$$

$$3\sqrt{\frac{10\cdot(a+b+c)}{9}} = \sqrt{10\cdot(a+b+c)} \Rightarrow \sqrt{10\cdot(a+b+c)} = 10a+b \;\;|\;(\;)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot(a+b+c) = 100a^2+20ab+b^2 \Rightarrow b^2 \vdots 10 \Rightarrow b \vdots 10 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot(a+c) = 100a^2 \Rightarrow a+c = 10a^2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 109$$

7. Fie numerele raţionale pozitive, a, b, c, astfel încât $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{a+c} = \dfrac{c}{a+b}$. Arătaţi că:

a) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a+2a+3c}+\dfrac{b+c}{b+2c+3a}+\dfrac{c+a}{c+2a+3b}} \in Q$;

b) $\sqrt{\dfrac{ab}{c\cdot(2a-b)}+\dfrac{bc}{a\cdot(2b-c)}+\dfrac{ca}{b\cdot(2c-a)}} \in R \setminus Q$.

Rezolvare:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2\cdot(a+b+c)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2a = b+c \\ 2b = a+c \\ 2c = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-2b = b-c \\ 2b-2c = c-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases} \Rightarrow a = c\;.$$

a) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a+2a+3c}+\dfrac{b+c}{b+2c+3a}+\dfrac{c+a}{c+2a+3b}} = \sqrt{\dfrac{2a}{6a}+\dfrac{2a}{6a}+\dfrac{2a}{6a}} = 1 \in Q$

b) $\sqrt{\dfrac{ab}{c\cdot(2a-b)}+\dfrac{bc}{a\cdot(2b-c)}+\dfrac{ca}{b\cdot(2c-a)}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{a^2}} = \sqrt{3} \in R \setminus Q$.

8. Să se demonstreze că: $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$. *(Concurs Moisil, clasa a VII-a, 2006)*

Rezolvare:

Notăm $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} \to$ 50 factori.

În demonstraţie ne vom folosi de încă două numere:

$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{100}{101} \to$ 50 factori

$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{98}{99} \to$ 50 factori.

Demonstrăm în 4 etape:

I. Demonstrăm că $A < B$, comparând fiecare factor:

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

$\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$

....

$\frac{99}{100} < \frac{100}{101}$

$\overline{\qquad\qquad}(\cdot)$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{100}{101} \Rightarrow$

$\Rightarrow A < B$

II. Demonstrăm că $A < \frac{1}{10}$, folosind rezultatul obţinut la punctul I:

$A < B \mid \cdot A \Rightarrow$

$A^2 < A \cdot B$

$A^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{100}{101}\right) \Rightarrow$

$A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \Rightarrow$

$A^2 < \frac{1}{100} \Rightarrow A^2 < \frac{1}{10^2} \Rightarrow A^2 - \frac{1}{10^2} < 0$

$\Rightarrow \left(A - \frac{1}{10}\right) \cdot \left(A + \frac{1}{10}\right) < 0 \Rightarrow A \in \left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$

$A < \frac{1}{10}$ (1)

III. Demonstrăm că $C < A$, comparând fiecare factor:

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

$\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$

....

$\frac{98}{99} < \frac{99}{100}$

$\overline{\qquad\qquad}(\cdot)$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{98}{99} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow C < A$

IV. Demonstrăm că $A > \frac{1}{10\sqrt{2}}$, folosind rezultatul obţinut la punctul III:

$C < A \mid \cdot A \Rightarrow$

$C \cdot A < A^2$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{98}{99}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100}\right) < A^2$

$\frac{1}{200} < A^2 \Rightarrow \frac{1}{\left(10\sqrt{2}\right)^2} - A^2 < 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{10\sqrt{2}} - A\right) \cdot \left(\frac{1}{10\sqrt{2}} + A\right) < 0 \Rightarrow$

$A \in R \setminus \left(-\frac{1}{10\sqrt{2}}; \frac{1}{10\sqrt{2}}\right) \Rightarrow A > \frac{1}{10\sqrt{2}}$

sau $\frac{1}{10\sqrt{2}} < A$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{1}{10\sqrt{2}} < A < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

9. Arătaţi că $2\sqrt{x-4}+3\sqrt{y-9}+4\sqrt{z-16}\le\frac{x+y+z}{2}$.

Rezolvare: Pornim rezolvarea prin impunerea condiţiilor de existenţă ale radicalilor:

$$\begin{cases}x-4\ge 0\\ y-9\ge 0\\ z-16\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ y\ge 9\\ z\ge 16\end{cases}$$

$$\sqrt{4\cdot(x-4)}+\sqrt{9\cdot(y-9)}+\sqrt{16\cdot(z-16)}\le\frac{x+y+z}{2}$$

Din inegalitatea mediilor $m_g\le m_a\Rightarrow$

$$\sqrt{4\cdot(x-4)}\le\frac{4+x-4}{2}\Rightarrow\sqrt{4\cdot(x-4)}\le\frac{x}{2}\qquad(1)$$

În mod similar:

$$\sqrt{9\cdot(y-9)}\le\frac{y}{2}\qquad(2)$$

$$\sqrt{16\cdot(z-16)}\le\frac{z}{2}\qquad(3)$$

Prin însumarea relaţiilor (1), (2) şi (3) $\Rightarrow 2\sqrt{x-4}+3\sqrt{y-9}+4\sqrt{z-16}\le\frac{x+y+z}{2}$.

10. Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}=\frac{z}{2}+1$, cu $x,y,z\ge 1$.

Rezolvare:

$$2\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-x}+2\sqrt{z-y}=z+2\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-x}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-y}-1\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}-1=0\\ \sqrt{y-x}-1=0\\ \sqrt{z-y}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=1 & \Big|(\ )^2\\ \sqrt{y-x}=1 & \Big|(\ )^2\\ \sqrt{z-y}=1 & \Big|(\ )^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=1\\ y-x=1\\ z-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y-2=1\Rightarrow y=3\\ z-3=1\Rightarrow z=4\end{cases}\Rightarrow(x,y,z)=(2,3,4)$$

11. Determinaţi laturile a, b, c ale unui triunghi şi unghiurile triunghiului, precizând natura acestuia, ştiind că: $\sqrt{a^2-4\sqrt{3}a+21}+\sqrt{b^2-2\sqrt{3}b+28}+\sqrt{c^2-6c+25}\le 12$.

Rezolvare:

$$\sqrt{\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+9}+\sqrt{\left(b-\sqrt{3}\right)^2+25}+\sqrt{(c-3)^2+16}\le 12$$

$$\begin{cases}\sqrt{\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+9}=3 & \Big|(\ )^2\\ \sqrt{\left(b-\sqrt{3}\right)^2+25}=5 & \Big|(\ )^2\\ \sqrt{(c-3)^2+16}=4 & \Big|(\ )^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+9=9\\ \left(b-\sqrt{3}\right)^2+25=25\\ (c-3)^2+16=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(a-2\sqrt{3}\right)^2=0\\ \left(b-\sqrt{3}\right)^2=0\\ (c-3)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{3}\\ b=\sqrt{3}\\ c=3\end{cases}$$

Calculăm: $a^2=12,\ b^2=3,\ c^2=9\Rightarrow a^2=b^2+c^2$ (teorema lui Pitagora).

Deci, *a* este ipotenuză, iar *b* şi *c* sunt catete (*figura III.25*)

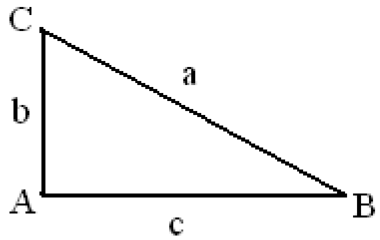


Figura III.25. Desenul problemei 11 (III.5)

Cum $m\left(\widehat{BAC}\right)=90^\circ$, rezultă că ΔABC este dreptunghic.

$$\sin\widehat{ABC}=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow m\left(\widehat{ABC}\right)=30^\circ \Rightarrow$$

$$m\left(\widehat{ACB}\right)=180^\circ-m\left(\widehat{ABC}\right)-m\left(\widehat{BAC}\right)=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$$

sau $\sin\widehat{ACB}=\frac{c}{a}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m\left(\widehat{ACB}\right)=60^\circ$.

12. Se dă un triunghi ascuţitunghic isoscel ABC, $AB=AC$. Fie D mijlocul laturii (BC), iar E şi F simetricele punctului D faţă de dreptele AB, respectiv AC.
a) Demonstraţi că patrulaterul BCFE este trapez isoscel;
b) Demonstraţi că patrulaterul AEDF este romb, dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.
Rezolvare: Construim desenul din *figura III.26*.

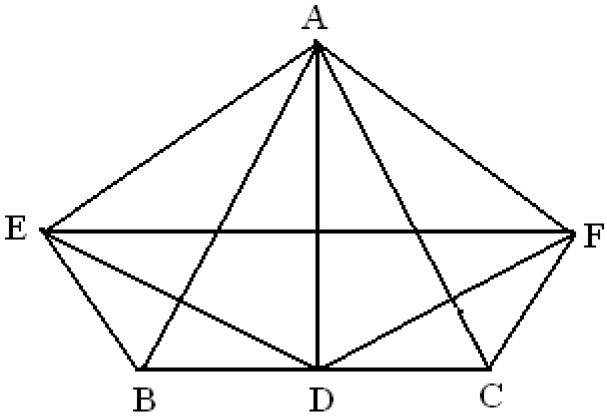


Figura III.26. Desenul problemei 12 (III.5)

a) [AD este mediană în ΔABC isoscel cu $AB=AC\Rightarrow$ [AD este şi bisectoare.

ΔAEF este isoscel cu $AE=AF$, iar [AD este bisectoarea unghiului $\widehat{EAF}\Rightarrow$
$\Rightarrow AD\perp EF\Rightarrow EF\parallel BC$ (1)
$[EB]\equiv[BD]\equiv[DC]\equiv[CF]$ (2)
Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ că BCFE este trapez isoscel.
b) dacă $[AE]\equiv[ED]\equiv[AD]\Rightarrow\Delta ADE$ echilateral $\Rightarrow$ [AB înălţime $\Rightarrow$ [AB bisectoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow m\left(\widehat{EAB}\right)=m\left(\widehat{DAB}\right)=30^\circ\Rightarrow m\left(\widehat{BAC}\right)=60^\circ\Rightarrow\Delta ABC$ este echilateral,

$\Rightarrow\Delta AED$ şi ΔAFD sunt echilateral congruente $\Rightarrow$ că AEDF este romb.

13. În ΔABC se consideră bisectoarea BD a unghiului $\hat{B}$, $D \in (AC)$. Prin D se duce paralela DE la dreapta AB, $E \in (BC)$ şi prin E paralela EF la BD, $F \in (AC)$. Dacă $AB = 20\text{cm}$, $BC = 30\text{cm}$, $AD + FC = 19\text{cm}$, să se calculeze lungimea laturii AC.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.27*.

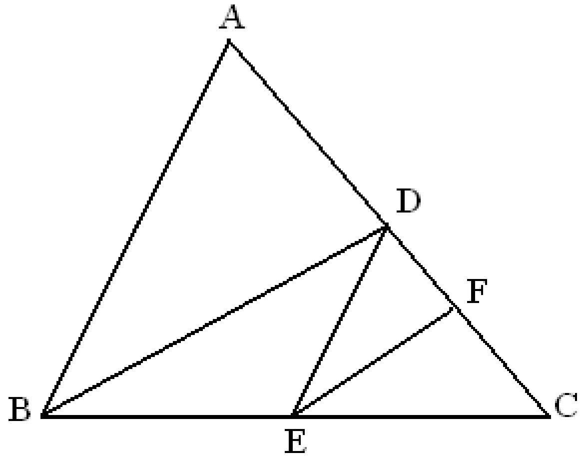


Figura III.27. Desenul problemei 13 (III.5)

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ BD - \text{bisectoare}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{20}{30} = \frac{AD}{DC}$$

$$\left.\begin{array}{l}BD \parallel EF\\ DE - \text{secantă}\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{FEC} \Rightarrow EF - \text{bisectoare} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{DF}{FC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ DE \parallel AB\end{array}\right| \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{20}{30} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{BC - CE}{CE} = \frac{30 - CE}{CE} = \frac{20}{30} \Rightarrow 20 \cdot CE = 900 - 30 \cdot CE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = 18\text{cm} \Rightarrow BE = DE = 12\text{cm}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BDC\\ EF \parallel BD\end{array}\right| \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DF}{FC} \Rightarrow 3 \cdot DF = 2 \cdot FC$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot AD = 2 \cdot DC \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot AD = 2 \cdot (DF + FC) \\ AD + FC = 19 \Rightarrow DA = 19 - FC \Rightarrow \\ 3 \cdot DF = 2 \cdot FC \Rightarrow DF = \dfrac{2}{3} \cdot FC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FC = 9\text{cm} \\ DF = 6\text{cm} \\ AD = 10\text{cm} \end{cases} \Rightarrow AC = AD + DF + FC = 25 \text{ cm}$$

14. Fie ABCD un paralelogram, punctul O situat în interiorul ΔABD şi $OQ \parallel AD, Q \in [CD]$, $\{M\} = OQ \cap BD$, $OP \parallel AB$, $P \in [BC]$, $OP \cap BD = \{N\}$. Arătaţi că $A_{OMN} = A_{MQD} + A_{BPN}$, dacă şi numai dacă segmentele $[MN], [MD], [NB]$ sunt laturile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza $[MN]$.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.28*.

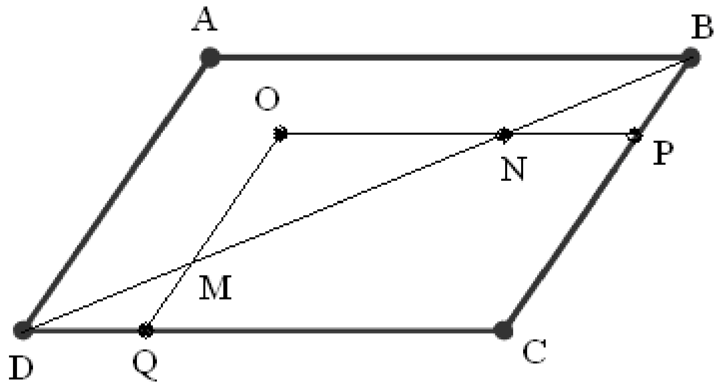


Figura III.28. Desenul problemei 14 (III.5)

$$\begin{cases} OP \parallel CD \\ QO \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \Delta DMQ \sim \Delta NMO \sim \Delta NBP \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_{\Delta DMQ}}{A_{\Delta NMO}} = \left(\dfrac{DM}{MN}\right)^2 \\ \dfrac{A_{\Delta NBP}}{A_{\Delta NMO}} = \left(\dfrac{BN}{MN}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_{\Delta DMQ} + A_{\Delta NBP}}{A_{\Delta MON}} = \frac{DM^2 + BN^2}{MN^2} \Rightarrow A_{OMN} = A_{MQD} + A_{BPN} \Leftrightarrow MN^2 = DM^2 + BN^2.$$

15. În *figura III.29* se află trei hexagoane regulate. Hexagonul mic are lungimea laturii de 2 cm. Latura hexagonului mijlociu are lungimea laturii cât jumătate din lungimea laturii hexagonului mare, iar latura hexagonului mic are lungimea cât jumătate din lungimea laturii hexagonului mijlociu. Aflaţi perimetrul figurii formate de cele trei hexagoane, limitată de linia îngroşată.

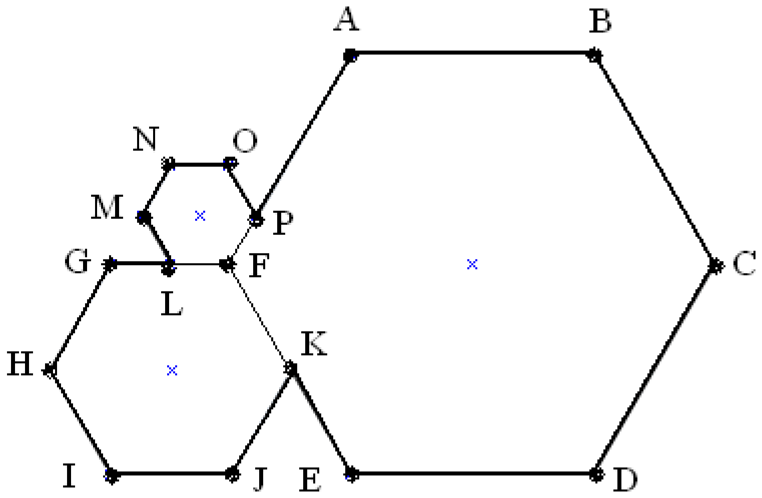


Figura III.29. Desenul problemei 15 (III.5)

Rezolvare: - în hexagonul ABCDEF avem: $AB = BC = CD = DE = EF = FA$,
- în hexagonul KJIHGF avem: $KJ = JI = IH = HG = GF = FK$,
- în hexagonul FLMNOP avem: $FL = LM = MN = NO = OP = PF$.

$LF = \dfrac{GF}{2} = 2\,cm \Rightarrow GF = 4\,cm$; $\qquad GF = \dfrac{AB}{2} = 4\,cm \Rightarrow AB = 8\,cm$

$P_{PABCDEKJIH\ GLMNOP} =$

$= PA + AB + BC + CD + DE + EK + KJ + JI + IH + HG + GL + LM + MN + NO + OP =$

$= \dfrac{3}{4} \cdot AB + 4 \cdot AB + 5 \cdot GF + 5 \cdot LF = \dfrac{19}{4} \cdot AB + 5 \cdot GF + 5 \cdot LF = \dfrac{19}{4} \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 68$ cm

16. În triunghiul ABC se duce bisectoarea [CD, unde $D \in AB$. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul BCD. Demonstraţi că $AC^2 = AD \cdot AB$.

Rezolvare: Construim desenul din *figura III.30*.

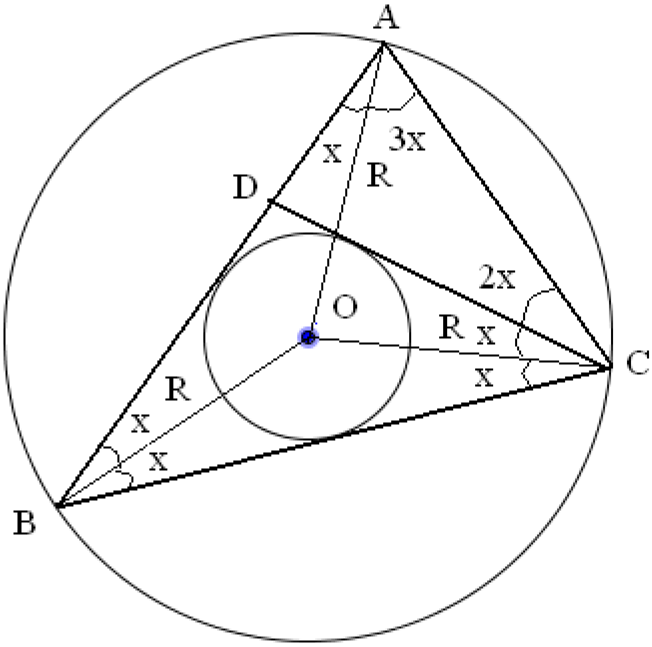


Figura III.30. Desenul problemei 16 (III.5)

Fie O centrul cercului circumscris ΔABC. Triunghiurile AOB, BOC, COA sunt isoscele, deoarece $AO = BO = CO = R$.

De asemenea, O este centrul cercului înscris în ΔBDC, în care $(CO$, $(BO$, $(AO$ sunt bisectoare pentru unghiurile ΔBDC, adică

$$m\left(\widehat{DBO}\right) = m\left(\widehat{OBC}\right) = m\left(\widehat{BCO}\right) = m\left(\widehat{OCA}\right) = m\left(\widehat{CAO}\right) = m\left(\widehat{BAO}\right) = x^\circ.$$

Cum [CD este bisectoarea $\Delta ABC \Rightarrow m\left(\widehat{ACD}\right) = 2x$.

ΔAOC este isoscel cu $AO = CO = R \Rightarrow m\left(\widehat{OAC}\right) = m\left(\widehat{OAC}\right) = 3x$

$$m\left(\widehat{BAC}\right) = m\left(\widehat{BCA}\right) = 4x$$

$$4X + 4X + 2X = 180^\circ \Rightarrow 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{BAC}\right) = m\left(\widehat{BCA}\right) = 72^\circ,\ \text{iar } m\left(\widehat{ABC}\right) = 36^\circ$$

Analizând ΔCAD şi ΔBCA, avem:

$$\begin{cases} m\left(\widehat{DAC}\right) = m\left(\widehat{ACB}\right) = 4x \\ m\left(\widehat{ACD}\right) = m\left(\widehat{CBA}\right) = 2x \end{cases} \Rightarrow \ \Delta CAD \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{CA}{BC} = \frac{AD}{CA} \Rightarrow CA^2 = AD \cdot BC = AD \cdot AB$$

III.5.2. PROBLEME RECAPITULATIVE PROPUSE SPRE REZOLVARE

ALGEBRĂ

1. Să se calculeze minimul sumei numerelor x şi y, care verifică ecuaţia:
$\sqrt{x-16}+\sqrt{y^2-8y+x}=\sqrt{16-x}+4$.

2. Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{\sqrt{16x}}$, cu $x \geq 1$.

3. Calculaţi, în funcţie de *n*, valoarea expresiei: $\sqrt{(3^n-5)^2}-\sqrt{(6-3^n)^2}$, $n \in N$.

4. Arătaţi că $E=\sqrt{124+11\sqrt{12}}+\sqrt{28-5\sqrt{12}}$ este un număr natural, pătrat perfect.

5. Arătaţi că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{1004 \cdot 1005}}{2009}<502$.

6. Arătaţi că $\sqrt{2x}+\sqrt{2x+2008}+\sqrt{2x+2009}<3x+2010, \forall x \geq 0$.

7. Fie $x,y,z \in R$, astfel încât $2x-y+2 \geq 0,\ y-z-5 \geq 0,\ z-2x+3 \geq 0$. Arătaţi că $2x+2y-3z=13$.

8. Fie a, b, c ≥ 2, numere naturale. Arătaţi că:
$a(a-1)+b(b-1)+c(c-1) \leq (a+b+c-4)\cdot(a+b+c-5)+4$.

GEOMETRIE

9. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor medianelor corespunzătoare catetelor este egală cu de *k* ori pătratul medianei corespunzătoare ipotenuzei. Aflaţi valoarea lui *k*.

10. Fiind dat triunghiul ABC având aria de 16 cm^2 şi punctele A', B', C' simetricele punctelor A, B, respectiv C, faţă de B, C, respectiv A, să se calculeze aria triunghiului A'B'C'.

11. Fie ABC un triunghi dreptunghic în B. Calculaţi perimetrul şi funcţiile trigonometrice ale unghiului C, ştiind că $tgC=\frac{3}{4}$, $AC=15cm$.

12. Fie ABC un triunghi dreptunghic în B. Demonstraţi că lungimea înălţimii din B este mai mare decât raportul dintre produsul şi suma lungimilor catetelor.

13. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că există un triunghi care are laturile $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

14. Demonstraţi că un triunghi dreptunghic este isoscel, dacă şi numai dacă $p=(1+\sqrt{2})\cdot h$, unde *p* este semiperimetrul, iar *h* este înălţimea corespunzătoare ipotenuzei.

15. Fie ABCD un paralelogram şi punctul O punctul de intersecţie al diagonalelor. Fie E un punct, $E \in (AD)$, astfel încât $BE=2\cdot AO$. Notăm cu F intersecţia dintre BE şi AO. Dacă $m\left(\widehat{EAF}\right)=60^\circ$, calculaţi $m\left(\widehat{AEF}\right)$.

16. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $AD \perp BC, D \in BC$. Arătaţi că.

a) $CD \cdot AB^2 = BD \cdot AC^2$;
b) $AC^2 \cdot BD^2 + AB^2 \cdot CD^2 = AD^2 \cdot BC^2$;
c) $AB + AC \leq BC\sqrt{2}$.

III.6. TESTE DE EVALUARE INIŢIALĂ, SEMESTRIALĂ, FINALĂ

MODEL DE TEST DE EVALUARE INIŢIALĂ PENTRU CLASA A VII-A

Oficiu	**10 puncte**
Partea I: ***Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.***	**45 puncte**
5 puncte	**1.** Rezultatul calculului $22\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)$ este: **A.** $\frac{209}{12}$ **B.** $\frac{12}{209}$ **C.** 34 **D.** 211
5 puncte	**2.** Într-o cutie sunt 6 bile albe şi 4 bile negre. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă? **A.** 0,3 **B.** 0,6 **C.** 0,4 **D.** 0,2
5 puncte	**3.** Un kilogram de kiwi costă 2,5 fără TVA, iar cu TVA costă 2,95 lei. Cât la sută reprezintă TVA? **A.** 20% **B.** 19% **C.** 21% **D.** 18%
5 puncte	**4.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor -24 şi 48 este: **A.** 24 **B.** 12 **C.** 48 **D.** 36
5 puncte	**5.** Unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOC}$ sunt în jurul unui punct. Dacă $m\left(\widehat{AOB}\right) = 2m\left(\widehat{BOC}\right)$, $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{AOC}\right) - 60^\circ$. Măsura celui mai mare unghi este de: **A.** 180° **B.** 220° **C.** 120° **D.** 60°
5 puncte	**6.** Dacă $ab+ac=15$ şi $b+c=5$, atunci valoarea lui *a* este: **A.** 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4
5 puncte	**7.** Baza unui triunghi isoscel are lungimea de 14cm. Ştiind că perimetrul triunghiului este de 48cm, lungimea fiecăreia dintre cele două laturi congruente este de: **A.** 12 cm **B.** 17 cm **C.** 14 cm **D.** 10 cm
5 puncte	**8.** Soluţia întreagă a ecuaţiei $5\cdot(x-1)=2x+7$ este: **A.** 4 **B.** 3 **C.** 10 **D.** 2
5 puncte	**9.** Opusul numărului 5 este: **A.** $\lvert 5\rvert$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** 25 **D.** -5
Partea a II-a: ***La următoarele probleme se cer rezolvări complete.***	**45 puncte**
10 puncte	**1.** Ştiind că numerele a şi b sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, calculaţi: $\frac{3a^2-2ab+4b^2}{2a^2+3ab+b^2}$.
10 puncte	**2.** Determinaţi numerele întregi x şi y, astfel încât să aibă loc egalitatea: $x\cdot(y-2)=23$.
10 puncte	**3.** Fie punctul C mijlocul segmentului $[AB]$ şi punctele D, E situate de o parte şi de alta a dreptei AB, astfel încât 2DB=AB, AE=AB şi $\widehat{DBA}\equiv\widehat{EAB}$. Demonstraţi că: $[AD]\equiv[CE]$.
15 puncte	**4.** Fie AD bisectoarea $\widehat{BAC}$ în ΔABC şi $M\in DC$. Paralela prin M la AD, intersectează dreapta AC şi AB în E, respectiv F. Să se arate că ΔAFE este isoscel.

MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL I

Oficiu **10 puncte**

Partea I: ***Scrieţi pe foaia de teză numai rezultatele*** **45 puncte**

5 puncte	**1.** Rădăcina pătrată a numărului 49 este…………
5 puncte	**2.** Dacă $a=-\frac{1}{6}$, numărul $\lvert 2a-3\rvert+\lvert 2a+1\rvert$ este egal cu…………..
5 puncte	**3.** Dacă laturile unui romb şi una dintre diagonale au lungimea de 8 cm, atunci rombul are aria de……………………..
5 puncte	**4.** Soluţia ecuaţiei $x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)=12{,}35$ este ………
5 puncte	**5.** Fie $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$. Valoarea $3{,}001\cdot S$ este egală cu.....
5 puncte	**6.** Un paralelogram ABCD are $m\left(\hat{A}\right)=60^\circ$. Atunci $m\left(\hat{B}\right)$ este ……………..
5 puncte	**7.** Expresia $\frac{4}{2-\sqrt{3}}$ se mai poate scrie……………
5 puncte	**8.** Partea întreagă a numărului -2,46 este…………….
5 puncte	**9.** Lungimea segmentului necunoscut din *figura 1* este……………..

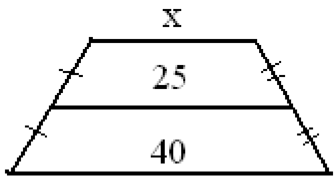


Figura 1.

Partea a II-a: ***Scrieţi pe foaia de teză rezolvările complete*** **45 puncte**

15 puncte **1.** Numerele raţionale pozitive a, b, c verifică egalităţile: $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$, $\frac{b}{c}=\frac{5}{7}$. Aflaţi valoarea raportului $\frac{a}{c}$.

15 puncte **2.** Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care are loc egalitatea:

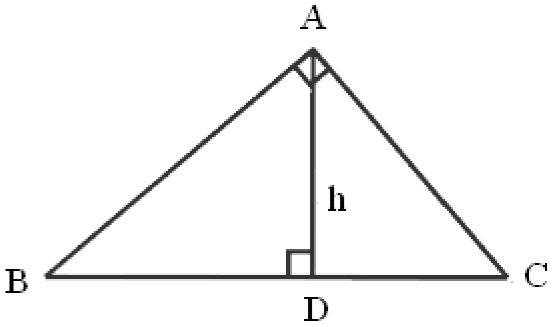
$$\overline{abc}+\frac{\overline{abc}}{2^2}+\frac{\overline{abc}}{2^3}+\ldots+\frac{\overline{abc}}{2^n}=2^n+2^{n-1}-1.$$

15 puncte **3.** În paralelogramul ABCD, $m\left(\hat{A}\right)=30^\circ$, $AB=12\text{cm}$, $AD=6\sqrt{3}\text{cm}$, $BD\perp BC$

a) Calculaţi aria paralelogramului ABCD;

b) Dacă M este simetricul punctului D faţă de punctul A şi $AB\cap MC=\{O\}$, să se arate că $[MO]\equiv[CO]$.

Total: 100 puncte ***Timp de lucru: 50 minute.***

MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL II	
Oficiu	**10 puncte**
Partea I: ***Scrieţi pe foaia de teză numai rezultatele***	**45 puncte**
5 puncte	**1.** Dacă $x + y = 10$ şi $xy = 7$, atunci este $x^2 + y^2$ este egal cu…………
5 puncte	**2.** Soluţia negativă a ecuaţiei $(x+2)^2 = 25$ este…….
5 puncte	**3.** Diametrul în centimetri al unui cerc este cu 8 mai mare decât raza. Atunci, aria cercului este egală cu…. π cm^2.
5 puncte	**4.** Completaţi spaţiul punctat cu un termen $25x^2 - ... + 9y^2$, pentru a se obţine pătratul unei diferenţe.
5 puncte	**5.** Valoarea cotangentei unui unghi de 45° este…
5 puncte	**6.** Soluţia ecuaţiei $x \cdot \sqrt{3} = 3$ este…………..
5 puncte	**7.** Dacă într-un sistem de axe ortogonale avem un punct $P(3;0)$, atunci distanţa de la punctul P la originea sistemului de axe este egală cu……………
5 puncte	**8.** Un hexagon este înscris într-un cerc de rază $4\sqrt{3}$ cm. Lungimea apotemei este…
5 puncte	**9.** Fie ΔABC dreptunghic (*figura 1*) cu $AD \perp BC$. Dacă $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{4}$, $AC = 6\,cm$, atunci lungimea BC este…………  ***Figura 1.***
Partea a II-a: ***Scrieţi pe foaia de teză rezolvările complete***	**45 puncte**
15 puncte	**1.** Fie $x, y > 0$. Arătaţi că $\frac{xy}{x+y} \le \frac{x+y}{4}$.
15 puncte	**2.** Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care are loc relaţia: $\frac{x-4}{6-x} > 0$.
15 puncte	**3.** Determinaţi $\sin 15^\circ$.
Total: 100 puncte	***Timp de lucru: 50 minute.***

MODEL DE TEST DE EVALUARE FINALĂ PENTRU CLASA A VII-A

Oficiu	**10 puncte**
Partea I: ***Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.***	**45 puncte**
5 puncte	**1.** Care este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2=16$? **A.** $\{\pm 2\}$ **B.** $\{\pm 3\}$ **C.** $\{\pm 4\}$ **D.** $\{\pm 5\}$
5 puncte	**2.** Care dintre expresiile de mai jos este egală cu $9-x^2$? **A.** $(3-x)\cdot(3+x)$ **B.** $(3-x)\cdot(9+x)$ **C.** $(3-x)^2$ **D.** $(3+x)^2$
5 puncte	**3.** Un dreptunghi are o latură de 4 cm, iar diagonala de 5 cm. Care este lungimea celeilalte laturi? **A.** 2cm **B.** 3cm **C.** 5cm **D.** 7cm
5 puncte	**4.** Care este soluţia ecuaţiei $\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{8}=0$? **A.** 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 2
5 puncte	**5.** Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A şi $\sin C=\frac{3}{4}$, atunci $\cos B$ este: **A.** 1 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$
5 puncte	**6.** După ce a cheltuit 64% din suma ce o avea, Alex a rămas cu 144 lei. Suma pe care a avut-o iniţial Alex a fost: **A.** 40 **B.** 400 **C.** 425 **D.** 450
5 puncte	**7.** Dacă AM este mediana din A a triunghiului ABC cu arie de 42 cm^2, atunci aria ΔAMB este egală cu: **A.** $21cm^2$ **B.** $82cm^2$ **C.** $21dm^2$ **D.** $14cm^2$
5 puncte	**8.** Pe laturile (AB) şi (AC) ale unui triunghi ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât DE||BC, AB=30 cm, AD=6cm, AE=5 cm, DE=4cm. Perimetrul ΔABC este: **A.** 80cm **B.** 72cm **C.** 75cm **D.** 70cm
5 puncte	**9.** Cardinalul mulţimii $M\cap Q$, cu $M=\{-3;\sqrt{8};\sqrt{16};0,(3)\}$ este: **A.** 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2
Partea a II-a: ***La următoarele probleme se cer rezolvări complete.***	**45 puncte**
6 puncte **9 puncte**	**1. a)** Dacă $a-b=4$ şi $a^2-b^2=40$, calculaţi $a+b$. **b)** Determinaţi numerele a şi b, apoi calculaţi media lor aritmetică şi geometrică.
10puncte	**2.** Efectuaţi: $E=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)\cdot\left(\frac{4}{3\sqrt{2}+4}-\frac{3}{3-2\sqrt{2}}\right)$.
	3. În triunghiul ABC, cu $m\left(\widehat{BAC}\right)=90^\circ$, AD este înălţime şi AM mediană, unde $M\in(BC)$ şi $D\in(BM)$. Ştiind că AM=6cm, $m\left(\widehat{DAM}\right)=30^\circ$, determinaţi:
7 puncte	**a)** măsurile unghiurilor ascuţite ale ΔABC;
7 puncte	**b)** perimetrul ΔABC;
6 puncte	**c)** aria ΔABC, rotunjită la cel mai apropiat număr întreg.